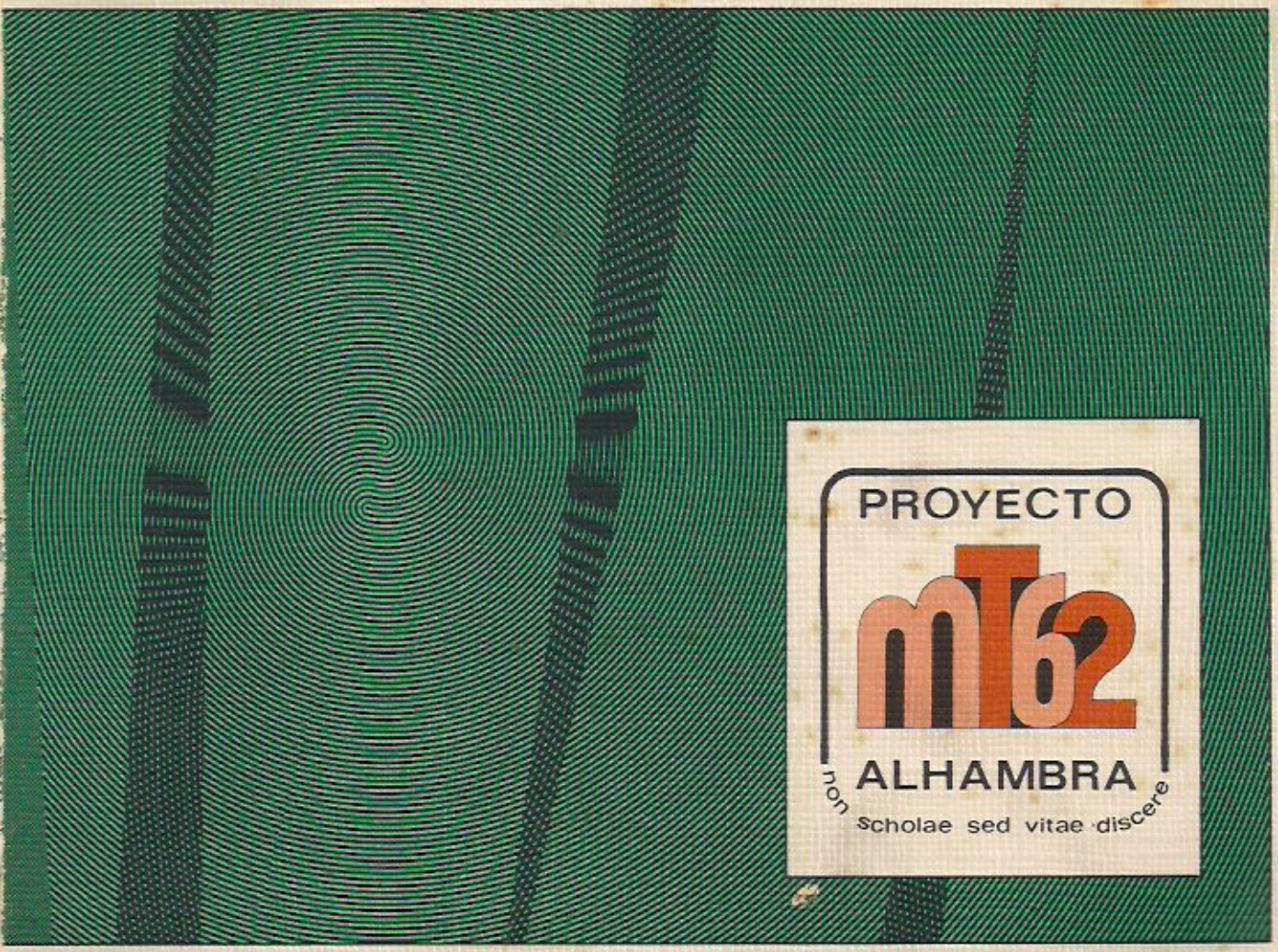
SERIE A

Hacia la MATEMATICA · 2

A. NEGRO · S. PEREZ CACHO · S. THIO DE POL



PROYECTO mT62
ALHAMBRA
non scholae sed vitae discere

LIBRERIA FERRERA
(LIBROS NACIONALES Y EXTRANJEROS)
P.º Tomás Morales, 9
(esquina Gabriel Araceli)
Tef.: 36 97 14
LAS PALMAS

PROYECTO
mT62
ALHAMBRA
non scholae sed vitae discere

PROYECTO **MT-62** ALHAMBRA

COMITE EDITORIAL

Adolfo Negro

Jefe del Departamento de Matemáticas del C.N.S.R. de Madrid. Profesor del I.C.E. de la Universidad de Deusto

Fernando Marín Alonso

Jefe del Departamento de Física del C.N.S.R. de Madrid
Profesor del C.U. de Madrid

José M. Esteban

Profesor de Química de la E.T.S. de Ingenieros de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid

Departamentos

Coordinación, control y seguimiento
Ciencias de la Naturaleza
Ciencias de la Educación
Lengua y Literatura
Socioantropologia
Matemáticas
Química
Física

PROYECTO

mT2

ALHAMBRA

non Scholae sed vitae discere

HACIA LA MATEMATICA-2

ADOLFO NEGRO

SANTIAGO PEREZ CACHO

SANTIAGO THIO DE POL

Alhambra

Primera edición, 1976
Primera reimpresión, 1977
Segunda reimpresión, 1977

EDITORIAL ALHAMBRA, S. A.
R. E. 182
Madrid-1. Claudio Coello, 76

Delegaciones:
Barcelona-8. Enrique Granados, 61
Bilbao-14. Doctor Albiñana, 12
La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
Málaga. La Regente, 5
Oviedo. Avda. del Cristo, 9
Sevilla-12. Reina Mercedes, 35
Valencia-3. Cabillers, 5

Rep. Argentina
Editorial Siluetas, S. A.
Buenos Aires-1201. Bartolomé Mitre, 3745/49

Perú
Editia Peruana, S. R. Ltda.
Lima. José Díaz, 208.

n c 24020010

© Es propiedad de los autores.
Reservados todos los derechos.

ISBN 84-205-0558-7 (obra completa)
ISBN 84-205-0295-2 (vol. 2)

Depósito legal: M. 35408 - 1977

Impreso en España - Printed in Spain

Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1977)

Indice general

Capítulos *Páginas*

UNIDAD TEMATICA **1 - LIMITES Y CONTINUIDAD**

1.1 Límites ... 3

Monotonía, 3. El cuerpo ordenado de los números reales, 8. Valor absoluto y distancia en R, 12. Sucesiones y límites, 14. El número e, 17. Cálculo de límites, 21. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.1, 25.

1.2 Funciones y continuidad ... 31

Funciones y gráficas, 31. Operaciones con funciones: adición y multiplicación de funciones, 37. Composición de funciones. Función inversa, 43. Límite de una función en un punto, 50. Continuidad, 57. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.2, 62.

1.3 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 70

1.4 Autoevaluación A-1 ... 74

UNIDAD TEMATICA **2 - FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES**

2.1 Función exponencial ... 83

Homomorfismos, 83. Funciones exponenciales de base 2 y de base 10, 87. La función exponencial de base a, 91. Generación de sucesiones con límite e, 93. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.1, 95.

2.2 Función logarítmica ... 97

La función inversa de la exponencial $y=a^x$, 97. El isomorfismo logarítmico, 99. Propiedades y cálculos logarítmicos, 103. Instrumentos para cálculos logarítmicos, 111. Relación entre funciones logarítmicas de distinta base. Cambio de base, 117. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales, 119. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.2, 124.

2.3 Funciones circulares ... 129

Goniometría, 129. Sistemas de referencia, 132. Razones goniométricas, 133. Segmentos goniométricos. Circunferencia unidad, 139. Relaciones goniométricas entre ángulos de distintos cuadrantes, 144. Funciones circulares, 151. Funciones inversas de las circulares continuas, 161. Ecuaciones goniométricas, 164. Trigonometría del triángulo rectángulo, 165. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.3, 174.

2.4 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 182

2.5 Autoevaluación A-2 ... 186

Capítulos *Páginas*

UNIDAD TEMATICA **3 - DERIVACION**

3.1 Derivada de una función en un punto ... 195

La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, 195. Recta tangente en un punto a una curva, 198. Derivada de una función en un punto, 201. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.1, 204.

3.2 Función derivada ... 206

Función derivada, 206. Continuidad y derivación, 211. Una aplicación lineal llamada derivación, 213. Derivadas sucesivas, 215. Diferencial, 218. Función derivada de la compuesta de dos funciones, 220. Derivadas de las funciones inversas, 222. Derivada y crecimiento, 223. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.2, 226.

3.3 Derivación ... 231

Función constante. Funciones lineales, 231. Función potencial, 232. Funciones polinómicas, 233. Función logarítmica, 234. Producto de dos funciones, 236. Función derivada de $y=1/x$, 237. Función derivada del cociente de dos funciones, 237. Función derivada de la potencial de exponente real, 238. Función derivada de la función exponencial, 240. Funciones derivadas de las funciones goniométricas, 242. Funciones derivadas de las inversas de las funciones goniométricas, 244. Funciones primitivas, 246. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.3, 248.

3.4 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 252

3.5 Autoevaluación A-3 ... 256

UNIDAD TEMATICA **4 - ESPACIO VECTORIAL**

4.1 Vectores en el plano y en el espacio físicos ... 265

Vectores ligados. Características, 265. Relación de equipolencia, 268. La noción de vector libre, 269. Adición de vectores libres, 271. El grupo aditivo de los vectores libres, 274. Producto de un número real por un vector, 275. Propiedades del producto $R \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, 275. Concepto de espacio vectorial, 276. Componentes de un vector en el plano, 278. Vectores en el espacio, 280. Componentes de un vector en el espacio, 281. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.1, 282.

4.2 La estructura de espacio vectorial ... 286

Axiomática de un espacio vectorial, 286. Teoremática inmediata de un espacio vectorial, 287. Combinaciones lineales, 288. Concepto de dependencia e independencia lineal, 289. Base de un espacio vectorial. Dimensión, 291. Isomorfismo entre V_2 y R^2, 294. Cambio de base en un espacio vectorial, 296. Subespacios de un espacio vectorial, 298. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.2, 299.

4.3 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 303

4.4 Autoevaluación A-4 ... 307

Capítulos *Páginas*

UNIDAD TEMATICA 5 - GEOMETRIA AFIN

5.1 El plano afín. Introducción al espacio afín ... 315

Las traslaciones, 315. El grupo de las traslaciones del plano, 318. Referencias en el plano. Coordenadas, 322. Ecuaciones de la traslación, 324. Cambio de sistema de referencia, 326. Concepto de plano afín. Introducción al espacio afín, 329. Soluciones a los ejercicios del capítulo 5.1, 330.

5.2 Geometría afín ... 334

Concepto de variedad lineal afín. La recta, 334. Determinación de la recta, 335. Ecuaciones de la recta, 336. Posiciones relativas de dos rectas, 340. Baricentros, 343. Punto medio de un segmento. Razón simple de tres puntos, 349. Determinación del punto que divide a un segmento en una razón dada, 352. Soluciones a los ejercicios del capítulo 5.2, 353.

5.3 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 355

5.4 Autoevaluación A-5 ... 358

UNIDAD TEMATICA 1

LIMITES Y CONTINUIDAD

1.1. Límites

1. *Monotonía*
2. *El cuerpo ordenado de los números reales*
3. *Valor absoluto y distancia en R*
4. *Sucesiones y límites*
5. *El número e*
6. *Cálculo de límites*

1.2. Funciones y continuidad

1. *Funciones y gráficas*
2. *Operaciones con funciones: adición y multiplicación de funciones*
3. *Composición de funciones. Función inversa*
4. *Límite de una función en un punto*
5. *Continuidad*

1.3. Ejercicios y problemas de recapitulación

1.4. Autoevaluación A-1

1.1

Límites

1. MONOTONIA

Se recordará de cursos anteriores la noción de relación de orden definida en un conjunto y su representación gráfica mediante diagramas de flechas.

En primer lugar, una relación binaria en un conjunto A es un subconjunto E de $A \times A$. Así, pues, los elementos de E son pares ordenados (a, b), y se dice que el primer elemento a del par está relacionado con b. Se unirán con una flecha de origen en a y extremo en b.

Para que la relación E sea de orden en A ha de cumplir las siguientes propiedades:

1. *Reflexiva:* todo elemento de A ha de estar relacionado consigo mismo.
2. *Antisimétrica:* si un elemento de A está relacionado con otro elemento distinto, éste no puede estar relacionado con aquél.
3. *Transitiva:* si un elemento de A está relacionado con otro y éste, a su vez, con un tercero, el primero debe estar relacionado con el tercero.

Formalmente:

$$E \subset A \times A \text{ es relación de orden en } A \iff \begin{cases} 1. & \forall\, a \in A\ ,\ (a, a) \in E \text{ (reflexividad)} \\ 2. & \forall\, a, b \in A\ ,\ \text{si } a \neq b \text{ y } (a, b) \in E \\ & \quad \Longrightarrow (b, a) \notin E \text{ (antisimetría)} \\ 3. & a, b, c \in A\ ,\ \text{si } (a, b) \in E \text{ y } (b, c) \in E \\ & \quad \Longrightarrow (a, c) \in E \text{ (transitividad)} \end{cases}$$

Ejemplo 1

Si A es un conjunto, la relación de «inclusión» en el conjunto de sus subconjuntos $\mathcal{P}(A)$ es una relación de orden, cuyo diagrama se representa en la figura 1.1, para $A = \{a, b, c\}$.

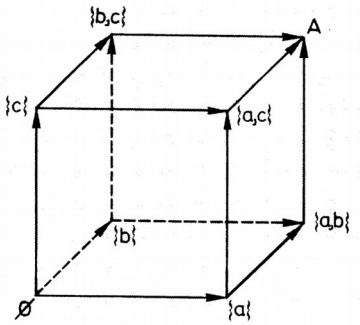


FIG. 1.1.

Ejercicio 1

Con un poco de paciencia, inténtese establecer las diecinueve relaciones de orden distintas que se pueden definir en un conjunto de tres elementos. Se comprobará que sus diagramas solamente se ajustan a cinco modelos diferentes.

Ejemplo 2

En el conjunto de los números naturales N, la relación «menor o igual que», $\leqslant$, definida $a \leqslant b \iff \exists\, c \in N \cup \{0\}$, tal que $a + c = b$, es de orden.

Se observará que c ha de poder valer 0 para que se cumpla la propiedad reflexiva.

Ejercicio 2

En el conjunto de los números racionales Q, se define la relación

$$a/b \leqslant c/d \iff a \cdot d \leqslant b \cdot c.$$

Demuéstrese que la relación no depende de los representantes a/b y c/d, y que se trata de una relación de orden en Q.

A continuación se matematizan dos procedimientos muy usados en la vida corriente, ya sea para ordenar un conjunto informe, ya sea para facilitar el reconocimiento de un orden ya existente.

CASO 1

Se tiene un conjunto B de treinta alumnos sin ningún criterio de ordenación entre ellos y, sin embargo, se pretende ordenarlos. Se toma un conjunto A de treinta tarjetas numeradas de *uno* a *treinta,* ordenadas con la relación estudiada en N.

Mediante una aplicación biyectiva f = «coser una tarjeta en cada solapa», se ordena automáticamente el conjunto B. En efecto, para saber si el alumno a está relacionado —«puede, obedece, manda ...»— con el alumno b, basta mirar sus antiimágenes por f; es decir, sus tarjetas respectivas.

CASO 2

Se dispone de un conjunto B de veintiún huevos de gallina para el estudio del desarrollo de la incubación. Como son todos de distinto día, tienen un orden propio, según el día de origen. Sin embargo, se hace difícil reconocerlo, a no ser que se recurra a un método parecido al del primer caso.

En resumen: dados un conjunto ordenado $\{A, E\}$, un conjunto no ordenado B y una aplicación biyectiva f de A en B, se obtiene una ordenación E' en B con el siguiente criterio:

$$b_1 \, E' \, b_2 \iff f^{-1}(b_1) \, E \, f^{-1}(b_2)$$

Ejercicio 3

Pruébese que, efectivamente, E' es una relación de orden definida en B.

Las definiciones siguientes contemplan situaciones parecidas a las de los dos casos estudiados. Se dispone de dos conjuntos ordenados $\{A, E\}$ y $\{B, F\}$, y de una aplicación f de A en B, no necesariamente biyectiva. Interesa conocer si f «conserva» o «invierte» de alguna manera el orden de los dos conjuntos.

Si f actúa de forma que si

$$\boxed{a_1 \, E \, a_2 \quad \text{y} \quad f(a_1) \, F \, f(a_2)}$$

se dirá que f es *monótona creciente;* y si, además, es inyectiva, se la califica como *estrictamente monótona creciente.* En ambos casos, las imágenes conservan el mismo orden que las antiimágenes.

Si f, en cambio, actúa de forma que

$$\boxed{a_1 \, E \, a_2 \quad \text{y} \quad f(a_2) \, F \, f(a_1)}$$

se entenderá que f es *monótona decreciente;* y si, además, f es inyectiva, se dirá que es *estrictamente monótona decreciente.* En cualquier caso, las imágenes presentan un orden inverso al de las antiimágenes.

Ejemplo 3

Sea f la aplicación de N en N, tal que $\forall\, n \in N$, $f(n) = n^2$.

Se trata de una función estrictamente monótona creciente. (La figura 1.2 da cumplida respuesta gráfica a la razón del nombre.) En efecto:

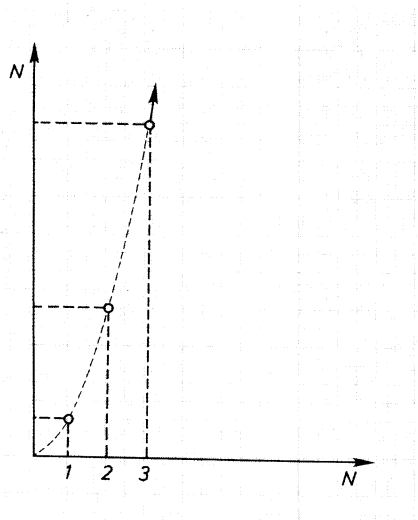


FIG. 1.2.

si $n \leqslant m$, entonces $f(n) = n^2 \leqslant f(m) = m^2$, ya que $n \leqslant m \implies \exists\, c \in N$, tal que $n + c = m$. Elevando al cuadrado ambos miembros,

$$n^2 + 2cn + c^2 = m^2.$$

Pero $2cn + c^2 = c_1 \in N$. Por tanto,

$$n^2 + c_1 = m^2 \implies n^2 \leqslant m^2.$$

Por otra parte, f es inyectiva, ya que si

$$f(n) = f(m) \implies n^2 = m^2 \implies n = m \text{ (en } N).$$

Ejercicio 4

Estúdiese la monotonía de la aplicación $g : N \to N$, $g(n) = 6n - 5$.

Ejercicio 5

Convenimos en que $\sqrt{a}$ es la raíz cuadrada positiva de a. Estúdiese la monotonía de la aplicación $h: Z \to N$, $h(z) = \sqrt{z^2}$. Quizá se encuentre variación de la monotonía de h, según las zonas del dominio de Z que se consideren.

Ejercicio 6

Considérese esta pregunta. Los fenómenos físicos con proporcionalidad directa o inversa, ¿tienen algo que ver con la monotonía? Piénsese, en el tiempo para realizar un trabajo: a más trabajo, más días; a más personas para realizarlo, menos días. Inténtese matematizar estas leyes.

Ejemplo 4

Sean $\{A, E\}$, $\{B, F\}$ y $\{C, G\}$ tres conjuntos ordenados y las aplicaciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$ entiéndanse monótonas crecientes. Si se estudia la función compuesta o producto $(g \circ f): A \to C$, se podrá seguir el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} a_1 \, E \, a_2 &\Longrightarrow f(a_1) \, F \, f(a_2), \text{ por ser } f \text{ monótona creciente} \\ &\Longrightarrow g(f(a_1)) \, G \, g(f(a_2)), \quad \text{por ser } g \text{ monótona creciente} \\ &\Updownarrow \\ &(g \circ f)(a_1) \, G \, (g \circ f)(a_2) \end{aligned}$$

es decir, $(g \circ f)$ sigue siendo monótona creciente.

Ejercicio 7

Véase la validez de enunciados paralelos al del ejemplo 4, variando las hipótesis de monotonía de las aplicaciones f y g.

Ejercicio 8

Estúdiese la monotonía de la función compuesta de los ejercicios 4 y 5.

Ejercicio 9

¿Es necesario en las hipótesis del ejemplo 4 que f y g sean estrictamente monótonas creciente para que lo sea la función compuesta? ¿Es suficiente?

2. EL CUERPO ORDENADO DE LOS NUMEROS REALES

En el cuerpo de los números reales $[R, +, \times]$ se puede distinguir un subconjunto R^+, llamado subconjunto de los números reales positivos, que tiene las tres propiedades siguientes:

1. $a \neq 0 \ , \ a \in R \Longrightarrow a \in R^+ \vee (-a) \in R^+$
   Hay una partición de R en R^+, $\{0\}$ y $R - \{R^+ \cup \{0\}\}$.
2. $\forall\, a, b \in R^+ \ , \ a + b \in R^+$
   La suma en R^+ es cerrada.
3. $\forall\, a, b \in R^+ \ , \ a \cdot b \in R^+$
   El producto en R^+ es cerrado.

La existencia de este subconjunto R^+ dota al cuerpo R de estructura de *cuerpo ordenado.*

Ejercicio 10

Inténtese demostrar que $1 \in R^+$, *sin dejarse llevar por la rutina de que* «1 *es positivo*».

Ejercicio 11

¿Cómo se justificaría, con las identificaciones necesarias, que N está contenido en R^+*?*

Ejercicio 12

Examínese si tiene o no las mismas propiedades que R^+ *el conjunto*

$$R^- = R - \{R^+ \cup \{0\}\}.$$

Ejercicio 13

Recordando las propiedades de $(Q, +, \times)$, *investíguese si el cuerpo de los racionales es un cuerpo ordenado.*

Ejemplo 5

El cuerpo de los números complejos $(C, +, \times)$ no es ordenado.

Supóngase que existe un subconjunto C^+ de complejos positivos (!) que no contiene el -1. Llegaremos en seguida a la conclusión de que sí lo contiene, con lo que quedará justificado que C^+ es una contradicción.

Como antes, 1 ha de pertenecer a C^+, ya que

$$(1 \neq 0) \wedge (-1 \notin C^+), \quad \text{por hipótesis}$$

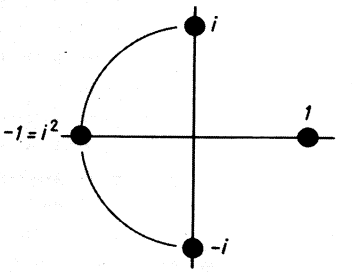


FIG. 1.3.

Ahora bien, como $i \neq 0$, o bien $i \in C^+$ o bien $-i \in C^+$; pero en cualquier caso, por la propiedad 3 de C^+ habría de cumplirse

$$i^2 = (-1)^2 = -1 \in C^+ \qquad \text{(Fig. 1.3)}$$

Definimos la siguiente relación en el cuerpo ordenado R:

$$\boxed{a \leqslant b \iff \exists\, c \in R^+ \cup \{0\} / a + c = b} \;;$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{a \leqslant b \iff b - a \in R^+ \cup \{0\}.}$$

Ejercicio 14

Pruébese que la relación $\leqslant$, definida en R, es una relación de orden. Hágase notar, además, que dados dos números reales cualesquiera a y b, o bien $a \leqslant b$, o bien $b \leqslant a$ (en R el orden es total).

Ejercicio 15

Examínese la monotonía de la aplicación f de R^+ en R, $f(x) = \sqrt{x}$ (raíz cuadrada positiva de x).

Ejercicio 16

Hállense las zonas de crecimiento y de decrecimiento de la función parabólica de R en R, $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Al tratar el cuerpo de los números reales es interesante considerar sus subconjuntos acotados.

Sea $\{A, \leqslant\}$ un conjunto ordenado y B un subconjunto no vacío de A. Se denomina *cota superior* de B a un elemento a de A (si es que existe), tal que todo elemento de B es menor o igual que es a. Es decir,

$$\left.\begin{array}{l} a \in A \text{ es cota} \\ \text{superior de} \\ B \subset A \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \forall\, b \in B,\ b \leqslant a$$

Se dirá entonces que B es *acotado superiormente*. Obsérvese que una cota de B puede pertenecer o no pertenecer a B. Una cota que sea menor o igual que todas las demás cotas superiores recibe el nombre de *extremo superior* de B.

De modo análogo, se definen *cota inferior, subconjunto acotado inferiormente* y *extremo inferior,* tal como se refleja en este cuadro-resumen.

- $a \in A$ es cota superior de $B \subset A \Longleftrightarrow \forall\, b \in B,\ b \leqslant a$.
- $B \subset A$ es acotado superiormente si $\exists$ cota superior.
- $a \in A$ es extremo superior de $B \subset A$, si es cota superior de B, y para toda otra cota superior de B, a', se verifica $a \leqslant a'$.
- $a \in A$ es cota inferior de $B \subset A \Longleftrightarrow \forall\, b \in B,\ a \leqslant b$.
- $B \subset A$ es acotado inferiormente si $\exists$ cota inferior.
- $a \in A$ es extremo inferior de $B \subset A$, si $\forall\, a'$ cota inferior de B, $a' \leqslant a$.

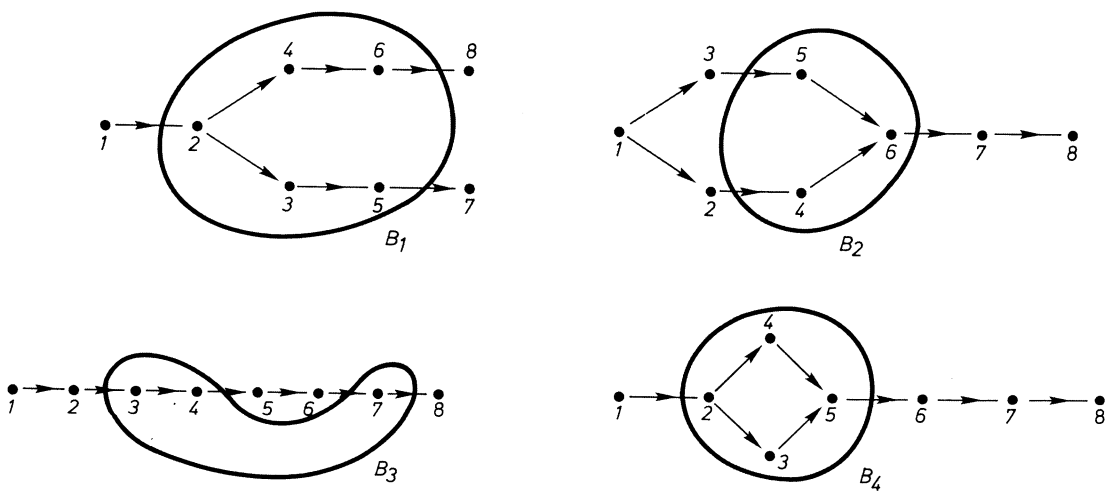


FIG. 1.4.

Ejercicio 17

En la figura 1.4 se representan cuatro relaciones de orden distintas en el mismo conjunto $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Los puntos interiores a los recintos cerrados* B_i *son los elementos de los cuatro subconjuntos de A. Dígase de cada* B_i *si está acotado superior y/o inferiormente, dando sus cotas inferiores y superiores, si procede, así como determinando sus extremos, si los hubiera.*

Ejercicio 18

Dénse las cotas y extremos de los siguientes subconjuntos, respecto a la ordenación ordinaria:

a) $R^+ \subset R$;
b) $N \subset R$;
c) $\{5,\ 1\,000\} \subset N$;
d) $Q \subset R$;
e) $Q^- \subset Q$;
f) {subconjuntos de dos elementos} $\subset P(\{1, 2, 3\})$ *.

Ejercicio 19

¿Pueden haber dos extremos superiores para un mismo subconjunto $B \subset A$? *Razónese.*

Ejercicio 20

Si una cota superior de $B \subset A$, *pertenece a B, ¿es extremo superior? Analícese.*

Se denomina *intervalo cerrado* de extremos a y b (a menor o igual que b) de un conjunto A ordenado totalmente, el subconjunto de elementos $x \in A$, tales que $a \leqslant x \leqslant b$. En notación formal

$$\boxed{[a, b]=\{x \in A / a \leqslant x \leqslant b\}}$$

De modo similar, *intervalo abierto* de extremos a y b (a menor o igual que b) de un conjunto A ordenado totalmente es un subconjunto cuyos elementos $x \in A$ cumplen que $a<x<b$. O sea:

$$\boxed{(a, b)=\{x \in A / a<x<b\}}$$

Ejercicio 21

Establézcanse el extremo superior y el extremo inferior de los siguientes intervalos, si es que los tienen. Conviene fijarse bien en el conjunto que los contiene.

a) $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset N$;
b) $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset Q$;
c) $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset R$;
d) $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subset R$;
e) $(0, \pi) \subset Q$;
f) $(0, \pi) \subset R$.

* $P(\{1, 2, 3\})$ es el conjunto de las partes de $\{1, 2, 3\}$ y la relación de orden es $\subset$.

Con el ejercicio anterior se habrá caído en la cuenta de que en Q algunos conjuntos acotados no tienen extremo (en Q). En cambio, el cuerpo ordenado de los reales R tiene esta propiedad:

> En el cuerpo ordenado de los números reales, todo subconjunto acotado superiormente (inferiormente) tiene extremo superior (inferior).

Debido a esta propiedad, que estamos lejos de poder demostrar en este nivel,

> el cuerpo ordenado de los números reales es *completo.*

Precisamente, el conjunto de los números reales se construye para llenar los «agujeros» de Q; y ellos, a su vez, ya no tienen «agujeros».

3. VALOR ABSOLUTO Y DISTANCIA EN *R*

Dado un elemento $a \in R$, si $a \neq 0$, alguno de los dos reales a y $-a$ será el mayor, ya que la relación de orden es total.

Se define como *valor absoluto de a,* y se denota $|a|$, el mayor de los números a y $-a$, si $a \neq 0$; y 0, si $a = 0$.

Como puede verse, «tomar valor absoluto» es una aplicación de R en R. En la figura 1.5 se dibuja la gráfica de ella.

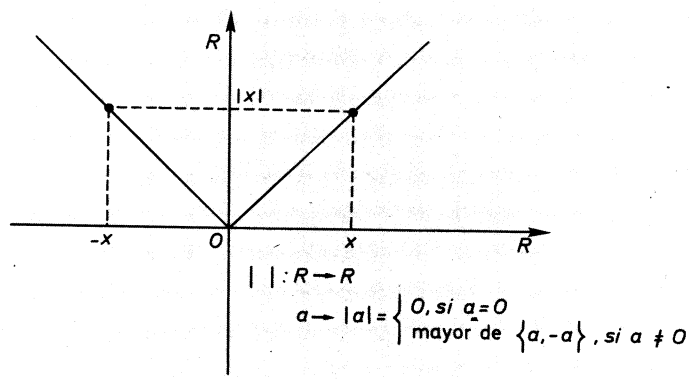


FIG. 1.5.

Ejercicio 22

He aquí las cuatro propiedades fundamentales del valor absoluto.

1. *Pruébese que* $|a| \in R^+ \cup \{0\}$.
2. $|a| = 0 \iff a = 0$. *Demuéstrese.*
3. *Compruébese que* $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. *¿En qué casos funcionará el signo igual? Seguramente se deberá recurrir al estudio de distintas posibilidades para los números a y b.*
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Ejercicio 23

Pruébese que $|a-b| = |b-a|$.

En cuanto al valor de $|a-b|$, examínese el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} & a = a - b + b \\ \Longrightarrow\ & |a| \leqslant |a-b| + |b| \\ \Longrightarrow\ & |a| - |b| \leqslant |a-b| \end{aligned} \qquad [1]$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & b = b - a + a \\ \Longrightarrow\ & |b| \leqslant |b-a| + |a| \\ \Longrightarrow\ & |b| - |a| \leqslant |b-a| = |a-b| \end{aligned} \qquad [2]$$

De [1] y [2] se concluye:

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|$$

Puede darse una demostración directa, mediante el estudio de los cuatro casos que se originan, a partir de los signos de a y de b.

Se sabe que los números reales se identifican con los puntos de una recta, en cuanto se hayan señalado los puntos correspondientes al *cero* y al *uno*. La suma de reales se convierte en suma de segmentos por transporte y el producto de reales en producto de segmentos, utilizando el teorema de Thales. El orden coincide con el sentido positivo de la recta ($0 \leqslant 1$).

Esta identificación justifica la introducción de un término geométrico en el tratamiento de R. Se construye una aplicación de $R \times R$ en $R^+ \cup \{0,\}$ llamada *distancia d*, que a cada par de puntos $(a; b)$ hace corresponder $|b-a|$. Formalmente,

$$\boxed{\begin{aligned} d:\ & R \times R \longrightarrow R^+ \cup \{0\} \\ & (a, b) \longrightarrow d(a, b) = |b-a| \end{aligned}}$$

Ejercicio 24

Teniendo en cuenta que la definición de distancia deriva de la de valor absoluto, demuéstrese que la aplicación distancia goza de las siguientes propiedades:

1. $d(a, b) = 0 \iff a = b$.
2. $d(a, b) = d(b, a)$.
3. $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$ (desigualdad triangular).

4. SUCESIONES Y LIMITES

Se recordará del curso anterior que:

> Una *sucesión de números reales* es una aplicación de N en R.

— La aplicación constante $f: N \to R$, $f(n) = \sqrt{2}$, $\forall\, n \in N$.
— La aplicación alternada $g: N \to R$, $g(n) = (-1)^n$, $\forall\, n \in N$.
— La aplicación $a: N \to R$, $a(n) = 1/n$, $\forall\, n \in N$.
— La aplicación $i: N \to R$, $i(n) = n$, $\forall\, n \in N$.

Para designar una sucesión se acostumbra escribir:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

o, en forma resumida, (a_n), en vez de decir que se trata de la aplicación a, cuyos valores (imágenes) particulares son $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(n)$, ...

Dado que N es un conjunto infinito, no será posible dar una sucesión en forma extensiva (todos sus términos). Se suelen seguir dos métodos: o bien se propone el término general $a_n = a(n) = \ldots$, o bien se establecen las imágenes de los primeros elementos, con la esperanza (!) de que se deduzca el criterio general *.

Ejercicio 25

Hállense los cinco primeros términos de las sucesiones siguientes:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{3} \quad ; \quad b_n = \frac{n}{n+1} \quad ; \quad c_n = (-1)^n(4n - 1)$$

$$d_n = (1 + n)^n$$

---

* Además de la dificultad, unos términos no determinan la sucesión. Por ejemplo:

$(2, 2, 4, \ldots)$ puede tener de criterio $\nearrow a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ o $\searrow a_n = (a_{n-2})^{a_n - 1}$

Ejercicio 26

Hállense los términos generales de las sucesiones cuyos primeros términos son:

a) 5, 9, 13, 17, ...

b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (sucesión de Fibonacci). Se sugiere concretar los dos primeros términos, independientemente del criterio general.

c) 3/1, 4/4, 5/9, 6/16, 7/25, ...

d) 1, 3, 6, 10, 15, ...

e) 1, 4, 10, 20, 35, ...

Con el fin de disponer de una representación gráfica más intuitiva que la representación ordinaria de aplicaciones, se conviene en adoptar para las sucesiones la representación utilizada en la figura 1.7, en lugar de la utilizada en la figura 1.6.

Viendo la figura 1.7 da la sensación de que la sucesión (a_n) crece de tal modo que «parece querer perderse en el infinito», mientras que la sucesión (b_n), a pesar de ser decreciente, va «acercándose» a cero, sin llegar a tomar valores negativos.

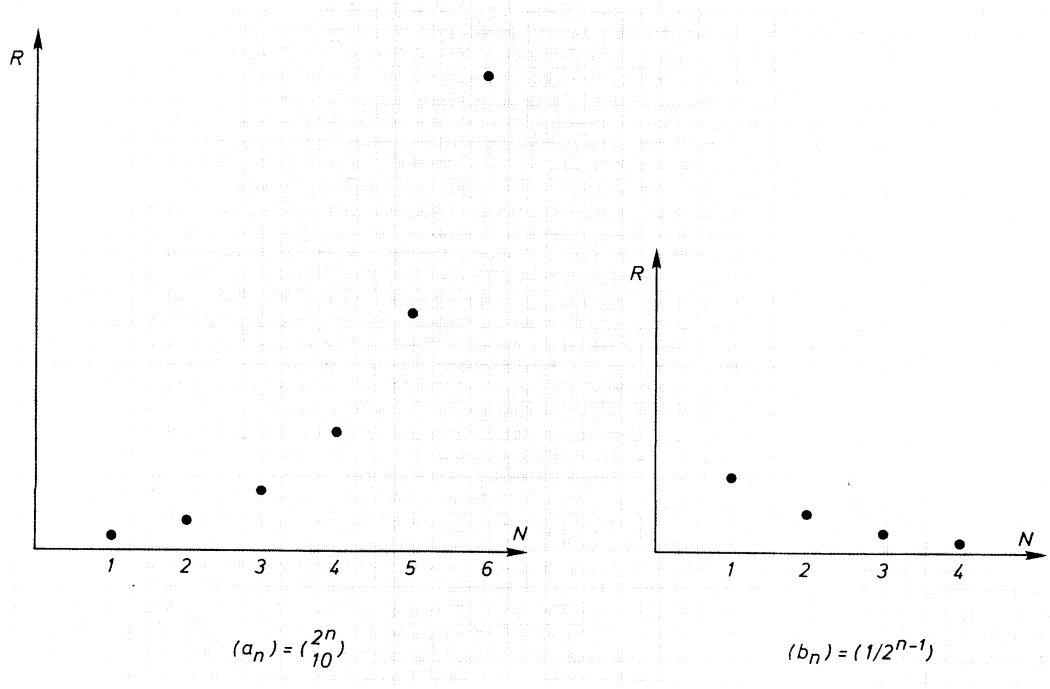


FIG. 1.6.

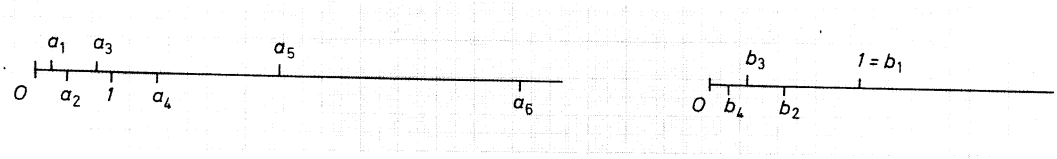


FIG. 1.7.

Interesa concretar matemáticamente qué significa «acercarse» o «perderse». De manera intuitiva se indica en un caso que «aminora la distancia», a medida que se «avanza» en la sucesión, o bien que los términos de la sucesión, en el segundo caso, rebasan cualquier cota prefijada.

Una sucesión real (a_n) tiene *límite* a, $a \in R$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in R^+, \exists h \in N / \forall n > h,\ n \in N,\ |a_n - a| < \epsilon$$

Si una sucesión tiene límite, se dice que es *convergente.*

Si se recuerda que $|a_n - a|$ es la distancia de a_n hasta a, la definición de sucesión convergente exige que *sea cual sea* $(\forall \epsilon > 0)$ la distancia que impongamos, *ha de haber* un término de la sucesión, a_h, *a partir del cual los demás* disten de a menos que el ϵ elegido.

La sucesión (a_n) tiene límite $+\infty$ $(-\infty)$

$$\Leftrightarrow \forall k \in R^+ \ (k \in \mathbb{R}^-), \exists h \in N / \forall n > h,\ n \in N,\ a_n > k \ (a_n < k)$$

En torno a los conceptos vertidos pueden plantearse tres tipos de problemas:

1. Comprobar si un número a es límite de una sucesión. (Bastará aplicar con mayor o menor dificultad la definición.)
2. Saber si una sucesión converge, aunque no se sepa cuál sea el límite. (Varios criterios dan respuesta a esta cuestión. Se mencionará alguno en el apartado siguiente.)
3. Hallar, efectivamente, el límite de una sucesión convergente. (A pesar de ser numerosas las reglas de cálculo, resulta a veces extremadamente difícil.)

Ejemplo 7

Compruébese que 1 es el límite de la sucesión

$$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Se observa primero que la sucesión es decreciente. En efecto:

$$n \leqslant m \Longrightarrow \frac{n+1}{n} \geqslant \frac{m+1}{m},$$

ya que

$$\frac{mn+m}{nm} \geqslant \frac{mn+n}{mn}$$

Además, es acotada inferiormente, puesto que

$$1 \leqslant a_n, \qquad \forall\, n \in N.$$

Por tanto, si se demuestra que un elemento a_n dista menos que ϵ de 1, los demás aún estarán más cerca. Ahora bien, para que

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \epsilon,$$

basta que

$$\left| \frac{n+1-n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon.$$

Y esta desigualdad se cumple si $\dfrac{1}{\epsilon} < n$.

Ejercicio 27

a) *Demuéstrese que* 0 *es el límite de la sucesión* $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

b) *Justifíquese que* $\lim\limits_{n \to \infty} (1/n) = 0$.

Ejercicio 28

Establézcanse tres sucesiones distintas, de límite 2.

Ejercicio 29

¿A partir de qué término de la sucesión $(a_n) = \left(\dfrac{5n+1}{3n-2}\right)$ *sucede que*

$$\left| a_n - \frac{5}{3} \right| < 0{,}001?$$

5. EL NUMERO *e*

Si hubiera que decidirse por escoger los cinco números más importantes de la matemática, la lista sería, sin duda,

0, 1, π, i (complejo) y e.

Los cuatro primeros son ya conocidos. Introduciremos el número e como límite de una sucesión que se sabe convergente y cuyo límite no es racional, ni siquiera irracional de tipo radical. El número e, al igual que π, es *trascendente* (=no raíz de una ecuación polinómica racional); pero la demostración de este hecho está del todo fuera del alcance del nivel de este libro.

Para saber si una sucesión es convergente, aunque no se conozca su límite, pueden usarse, entre otros, los tres criterios que a continuación se enuncian sin demostración.

1. Toda sucesión real monótona $\left\{\begin{matrix}\text{creciente}\\ \text{decreciente}\end{matrix}\right\}$ acotada $\left\{\begin{matrix}\text{superiormente}\\ \text{inferiormente}\end{matrix}\right\}$ es convergente. (El límite coincide con el extremo superior o inferior de que se hablaba en el apartado 2.)
2. Si los términos de una sucesión (a_n) están comprendidos correlativamente entre los de dos sucesiones (b_n) y (c_n) que convergen hacia el mismo límite, la sucesión (a_n) converge también hacia el mismo límite.
3. Si una sucesión converge, cualquier subsucesión suya converge hacia el mismo límite.

Conviene dejar claro el concepto intuitivo de subsucesión. Piénsese, por ejemplo, en la subsucesión de los términos impares o de los pares de una sucesión. O también, en la subsucesión formada por los términos $(a_1, a_4, a_{16}, \ldots, a_{n^2}, \ldots)$.

Para obtener una subsucesión se requiere una aplicación de N en N estrictamente monótona creciente, con lo cual aseguramos no invertir el orden de los términos de la sucesión original. Véase el esquema formal que resume lo dicho:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{a} & B \\ n & \longrightarrow & f(n) & \longrightarrow & a(f(n)) \end{array}$$

La aplicación compuesta $(a \circ f)$ es una nueva sucesión cuyos términos pertenecen a la anterior y en el mismo orden. Siguiendo nuestras convenciones de notación para las sucesiones y teniendo en cuenta que f es una sucesión, escribiremos:

$$a(f(n)) = a_{f_n}$$

Ejercicio 30

Examínense las tres subsucesiones indicadas arriba, hallando cuál es la aplicación f y comprobando si cumple las condiciones requeridas.

Considérese la sucesión

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

cuyos primeros términos son: 2, 9/4, 16/9, ...

Desarrollemos, mediante la fórmula de Newton, el término general

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}=$$

simplificando,

$$=2+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{(n-1)(n-2)}{n\cdot n}\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n!}=$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}.$$

Obsérvese que el desarrollo tiene $n+1$ sumandos. Si se hace el mismo desarrollo para el término

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \quad , \quad n\leqslant m\,,$$

se obtendrán más sumandos, concretamente $m+1$; y comparados correlativamente con los de la suma anterior, cada uno resulta mayor que el otro. En efecto:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2+\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\cdot\frac{1}{m!}$$

y

$$\left(1-\frac{i}{n}\right)<\left(1-\frac{i}{m}\right) \quad , \quad \forall\, i\in N$$

Por otra parte, suprimiendo sustraendos en el último desarrollo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, se obtiene la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} \quad , \quad \forall\, n\in N;$$

pero

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<$$

$$<2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1^{(n-1}}{2}\cdot\ldots\right);$$

y, como el segundo sumando del segundo miembro de la desigualdad es la suma de una progresión geométrica que vale menos que 1, resulta que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

En resumen, la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, creciente y acotada superiormente, converge. Su límite, denominado *número e,* se puede aproximar teniendo en cuenta que, cuando n crece, los sumandos del desarrollo se hacen rápidamente muy pequeños y que los factores $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ valen «casi» uno.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

$$e=2{,}718281828459045\ldots$$

Ejercicio 31

Haciendo uso de los criterios expuestos, hállense:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$; *b)* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}$

En general, es válida la regla de que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}=e,$$

si $f(n)\to+\infty$ *cuando* $n\to\infty$.

Ejercicio 32

Teniendo en cuenta que

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right]^2}$$

pruébese que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{e}.$$

Ejercicio 33

Con artificios parecidos al del ejercicio anterior, pruébese que

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$;

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$;

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p$.

Ejercicio 34

Calcúlese $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n+1}$, *teniendo en cuenta que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^3 = 1.$$

6. CALCULO DE LIMITES

Los siguientes teoremas permiten obtener los límites de sucesiones complicadas mediante operaciones entre límites de sucesiones más simples.

Supónganse dos sucesiones (a_n) y (b_n) que convergen, respectivamente, hacia a y b. Se pueden obtener nuevas sucesiones operando término a término los elementos de ambas. La convergencia y límite de las sucesiones-resultado son los siguientes:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$.

   En este último caso, b ha de ser distinto de cero, y entonces, también b_n será distinto de cero a partir de un cierto n en adelante. Así, aunque a_n/b_n no estuviera definido para algún valor de n, podría prescindirse de tales términos, que a lo sumo serán un número finito.

Ejercicio 35

Demuéstrese la propiedad 1.

Ejercicio 36

Hállense los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n^2+1}{n^3}$;

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{\frac{4n^2}{n^2-1}}$;

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2n^2}{n-1}}$;

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{3n}\right]}$

Si se admite expresar como 0, 1, $\pm\infty$ el criterio general de sucesiones que tienden a estos «números», frecuentemente se pueden encontrar, al descomponer dichos criterios, expresiones del tipo

$$\infty-\infty \;;\; 0\cdot\infty \;;\; \frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; 0^0 \;;\; \infty^0 \;;\; 1^\infty$$

Estas formas suelen denominarse *casos indeterminados,* porque en ellos el límite de la sucesión que se obtiene al operar dos sucesiones no puede calcularse a partir de los límites de cada una de ellas.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \quad \text{(del tipo } \infty-\infty\text{)}$$

Método de cálculo: se multiplica y divide por $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Entonces,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

que evidentemente tiende a cero, porque el denominador tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2-2}{2n^3-n+3} \quad \left(\text{del tipo } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Método de cálculo: se dividen el numerador y el denominador por n^3, la

máxima potencia de n. Así,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-2}{2n^3-n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3/n^3+n^2/n^3-2/n^3}{2n^3/n^3-n/n^3+3/n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n-2/n^3}{2-1/n^2+3/n^3}=\frac{1}{2}$$

(El último paso se ha dado utilizando las propiedades del límite de un cociente y límite de una suma.)

Adviértase que el número e ha surgido de un caso de indeterminación de tipo 1^∞.

El caso $\frac{\infty}{\infty}$ se convierte en $\frac{0}{0}$ si se dividen numerador y denominador por el producto de ambos:

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$$

Ejercicio 37

Calcúlense los límites siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+3n}-2-\sqrt{2n^2-1})$;

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{2n-1}-\frac{n^2+n}{2n+1}\right)$;

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4-n^2+2}{2n^3+3n-1}$;

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3n+5}{2n^2-5n}\right)^{\frac{n^3-3}{n^2+2}}$

Ejemplo 10

Hállese el límite de la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... Se observará que el criterio es

$$a_n=2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdot 2^{1/8}\cdot\ldots\cdot 2^{1/2^n}=2^{(1/2+1/4+\ldots+1/2^n)}$$

La expresión del exponente es la suma de los n términos de una progresión geométrica, de modo que

$$a_n=2^{1-1/2^n}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2^{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2^{1-0}=2.$$

Podría haberse seguido otro método. El término general a_n se podría expresar

$$a_n=\sqrt{2\cdot a_{n-1}},$$

siendo $a_1=\sqrt{2}$.

Si se demuestra que es creciente y acotada, se sabrá que tiene límite, que se puede denotar a. Entonces:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 \cdot a_{n-1}} = \sqrt{2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{2a}$$

Así, pues, de $a = \sqrt{2a}$ se deduce

$a = 0$ (solución imposible);
$a = 2$ (que es el límite buscado).

Ejemplo 11

Hállese el límite de la sucesión

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}, \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}, \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{25}, \ldots$$

El término general podría expresarse

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Ahora bien, cada factor puede tomar la forma $\dfrac{(k+1)(k-1)}{k^2}$.

Por consiguiente,

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2\cdot n\cdot(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2\cdot n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 38

Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}}{2^{n+1}}.$$

Ejercicio 39

Hállese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+3) - (n^2+1)}{\sqrt{n(n+3)} + n}.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.1

1. Los cinco modelos de diagramas posibles son los de la figura 1.8.

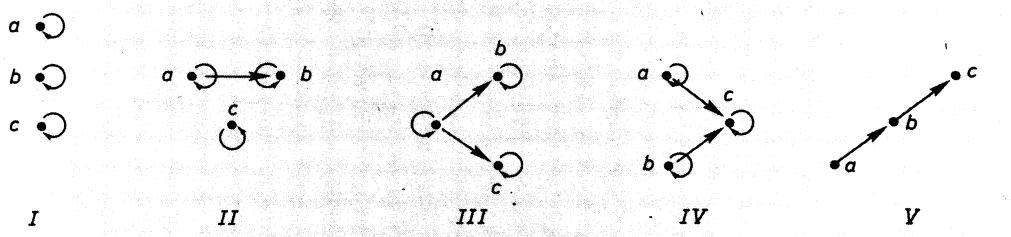


FIG. 1.8.

Con diagrama del tipo I hay una sola relación de orden; con diagrama del tipo II hay seis relaciones de orden (permutaciones); con diagrama del tipo III hay tres relaciones de orden (permutaciones con repetición); con diagrama del tipo IV hay tres relaciones de orden (permutaciones con repetición); con diagrama del tipo V hay seis relaciones de orden (permutaciones).

2. Suponemos todos los números enteros que entran en la demostración estrictamente positivos; en otros casos, hay que manejar con cuidado los productos con desigualdades, pero los resultados siguen siendo ciertos.

$$\text{Si} \begin{cases} a'/b' = a/b \\ c'/d' = c/d \\ a/b \leqslant c/d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a'b = b'a \\ cd' = c'd \\ ad \leqslant bc \end{cases} \Longrightarrow \text{(multiplicando término a término)}$$

$$a'bcd'ad \leqslant b'ac'dbc \Longrightarrow a'd' \leqslant b'c' \Longrightarrow a'/b' \leqslant c'd'$$

La relación $\leqslant$ es *reflexiva:*

$$a/b \leqslant a/b, \quad \text{ya que} \quad ab \leqslant ab$$

antisimétrica:

$$a/b \leqslant c/d \quad \text{y} \quad c/d \leqslant a/b \Longrightarrow ad \leqslant bc \leqslant ad \Downarrow ad = bc$$

transitiva:

$$a/b \leqslant c/d,\ c/d \leqslant e/f \Longrightarrow ad \leqslant bc,\ cf \leqslant ed \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow adcf \leqslant bced \Longrightarrow af \leqslant be \Longrightarrow a/b \leqslant e/f$$

3. *Reflexiva:*

$$b_1 E' b_1, \quad \text{ya que} \quad f^{-1}(b_1) E f^{-1}(b_1).$$

Antisimétrica:

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } b_1 E' b_2 \Longrightarrow f^{-1}(b_1) E f^{-1}(b_2) \\ \text{si } b_2 E' b_1 \Longrightarrow f^{-1}(b_2) E f^{-1}(b_1)\end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) \Longrightarrow b_1 = b_2.$$

Transitiva:

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } b_1 E' b_2 \Longrightarrow f^{-1}(b_1) E f^{-1}(b_2) \\ \text{si } b_2 E' b_3 \Longrightarrow f^{-1}(b_2) E f^{-1}(b_3)\end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}(b_1) E f^{-1}(b_3) \Longrightarrow b_1 E b_3.$$

Obsérvese que nos apoyamos en la definición de E' y en que E es relación de orden.

4. Es estrictamente monótona creciente.

5.

$$\text{La aplicación } h \text{ es} \left\{\begin{array}{l}\text{estrictamente monótona creciente} \\ \quad \text{de } 0 \text{ a } +\infty \\ \text{estrictamente monótona decreciente} \\ \quad \text{de } -\infty \text{ a } 0\end{array}\right.$$

6. Son leyes monótonas. La proporcionalidad directa es creciente; la inversa es decreciente.

Si se llama $\mathfrak{T}$ al trabajo, P a las personas y T al tiempo, las leyes proporcionales serían:

$$\mathfrak{T}/P = \text{constante} \quad ; \quad T \cdot P = \text{constante}.$$

7. La función compuesta de dos funciones decrecientes es creciente. Nada se puede afirmar sobre la monotonía de la función compuesta de dos funciones, una creciente y otra decreciente.

8. $g \circ h : Z \to N, \; z \to 6(+\sqrt{z^2}) - 5$ es decreciente de $-\infty$ a 0 y creciente de 0 a $+\infty$.

9. No es necesario, pero es suficiente.

10. Demostración por reducción al absurdo: como $1 \neq 0$, si $1 \notin R^+ \Longrightarrow$ $\Longrightarrow -1 \in R^+$; y por la propiedad tercera, $(-1)(-1) \in R^+$. Pero $(-1)(-1) = 1$, de modo que 1 pertenecería y no pertenecería simultáneamente a R^+.

11. Como 1 está en R^+, $1 + \ldots + 1 = n \in R^+$, por la propiedad segunda.

12. R^- cumple las propiedades primera y segunda, pero no la tercera.

13. Sí, hay un subconjunto Q^+ que cumple las tres propiedades.

14. *Reflexiva:* como $a + 0 = a$, $a \leqslant a$.
Antisimétrica: si

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad b \leqslant a \Longrightarrow a + c_1 = b \quad \text{y} \quad b + c_2 = a;$$

es decir:

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_1,\ c_2 \in R^+ \cup \{0\};$$

pero $c_1 + c_2 = 0 \Longrightarrow c_1 = -c_2$; por tanto, $-c_2$ también pertenece a $R^+ \cup \{0\}$. Como c_2 y $-c_2$ no pueden pertenecer a R^+, ambos han de ser cero, lo cual implica que

$$c = c_1 = 0 \Longrightarrow a = b.$$

Transitiva: si

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad b \leqslant c \Longrightarrow a + c_1 = b, \quad b + c_2 = c \Longrightarrow a + c_1 + c_2 = c;$$

y como

$$c_1 + c_2 \in R^+ \cup \{0\}, \quad a \leqslant c.$$

En fin: por ser R grupo aditivo, $\forall\, a, b \in R$, $\exists\, c$, tal que $a + c = b$.

Ahora bien: si $c \in R^+ \cup \{0\}$, ya se tiene $a \leqslant b$;

si $c \notin R^+ \cup \{0\}$, entonces $-c \in R^+ \cup \{0\}$

y, por consiguiente,

$$a + c = b \Longrightarrow a = b - c = b + (-c) \quad \text{y} \quad b \leqslant a.$$

15. Es estrictamente monótona creciente.

16. Decrece de $-\infty$ a 3 y crece de 3 a $+\infty$.

17.

	Acotado superior	*Acotado inferior*	*Cotas superiores*	*Cotas inferiores*	*Extremo superior*	*Extremo inferior*
B_1	no	sí	—	1, 2	—	2
B_2	sí	sí	6, 7, 8	1	6	1
B_3	sí	sí	7, 8	1, 2, 3	7	3
B_4	sí	sí	5, 6, 7, 8	1, 2	5	2

18. *a)* Cotas inferiores $R^- \cup \{0\}$, extremo inferior 0;
b) cotas inferiores $R^- \cup [0, 1]$, extremo inferior 1;
c) cotas inferiores 1, 2, 3, 4, 5, extremo inferior 5,
cotas superiores $n \geqslant 1\,000$, $n \in N$,
extremo superior 1 000;
d) no está acotado;
e) cotas superiores $Q^+ \cup \{0\}$, extremo superior 0;
f) cota superior y extremo superior $\{1, 2, 3\}$,
cota inferior y extremo inferior ϕ.

19. No, por la definición de extremo y la propiedad antisimétrica.

20. Sí.

21. *a)* 1 y 2; *d)* $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$;

b) no tiene; *e)* 0 y no tiene extremo superior;

c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$; *f)* 0 y π.

22. 1. $|a|=0 \Longrightarrow 0=$ máx. de $(a$ y $-a)$; entonces, o bien $a=0$ o bien $-a=0$; en ambos casos, $a=0$. Por otra parte, si $a=0$, $-a=0$ y $0=$ máx. de $(a, -a)=|a|$.

2. Si $a=0 \Longrightarrow |a| \in R^+ \cup \{0\}$ (apartado anterior).
Si $a \neq 0$, o bien $a \in R^+$ o bien $-a \in R^+$. Pero, dados dos números cualesquiera, $b \in R^+$, $c \notin R^+$, es mayor el que pertenece a R^+, pues de lo contrario, $b+c_1=c$, con b y $c_1 \in R^+$, con lo cual $c \in R^+$, contra lo supuesto.

Por tanto, entre a y $-a$ el mayor es el que pertenece a R^+.

3. Cuatro casos posibles:

$a, b \in R^+ \cup \{0\}$, $|a+b|=a+b=|a|+|b|$;
$a \in R^-$, $b \in R^+ \cup \{0\}$, $|a+b|<|-a+b|=|-a|+|b|$;
$a \in R^+ \cup \{0\}$, $b \in R^-$, $|a+b|<|a-b|=|a|+|-b|$;
$a \in R^-$, $b \in R^+$, $|a+b|=|-a-b|=|-a|+|-b|$.

En todos ellos, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, valiendo el *igual,* si a y b son simultáneamente positivos o negativos o si alguno de los dos vale cero.

4. También cuatro casos posibles; sólo se estudia el siguiente:

$$a \in R^-, \quad b \in R^+ \cup \{0\}, \quad |ab|=-ab=|-a| \cdot |b|.$$

23. $|a-b|=$ máx. de $\{(a-b), -(a-b)\}$;
$|b-a|=|-(a-b)|=$ máx. de $\{-(a-b), (a-b)\}$.

24. 1. $d(a, b)=0 \Longrightarrow |a-b|=0 \Longrightarrow a-b=0 \Longrightarrow a=b$.
2. $d(a, b)=|a-b|=|-(a-b)|=|b-a|=d(b, a)$.
3. $d(a, b)=|a-b|=|a-c+c-b| \leqslant |a-c|+|c-b|=d(a, c)+d(c, b)$.

25. $(a_n)=(2/3,\ 5/3,\ 17/3,\ 26/3,\ 37/3,\ \ldots)$;
$(b_n)=(1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ 5/6,\ \ldots)$;
$(c_n)=(-3,\ +7,\ -11,\ +15,\ -19,\ \ldots)$;
$(d_n)=(2,\ 9,\ 64,\ 625,\ 7776,\ \ldots)$.

26. *a)* $4n+1$;

b) $a_1=0$, $a_2=1$,
$a_3=a_0+a_1$,
$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$;

c) $\dfrac{n+2}{n^2}$;

d) $\dfrac{n(n+1)}{2}=\binom{n}{2}$;

e) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=\binom{n}{3}$.

27. *a)* $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|=\dfrac{1}{2^n}<\epsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\epsilon}<2^n$; como 2^n se hace tan grande como se quiera y a partir de $2^h>\dfrac{1}{2}$, $\left|\dfrac{1}{2^n}-0\right|<\epsilon$, $\forall\, n$, 0 es el límite;

b) $\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < n$. A partir de $h < \frac{1}{\epsilon}$,

$\forall\, n,\ \left|\frac{1}{n}-0\right| < \epsilon.$

28. (2). Sucesión constante 2:

$$\left(2-\frac{1}{2^n}\right); \qquad \left(2-\frac{1}{n}\right).$$

29. $h = 11$.

30. Términos pares: $f: n \to 2n$. Es inyectiva monótona creciente.
Términos impares: $f: n \to 2n-1$. Es inyectiva monótona creciente;
Términos cuadráticos: $f: n \to n^2$. Es inyectiva monótona creciente.

31. *a)* y *b)* son subsucesiones de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; por consiguiente, su límite es el número e.

32. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

33. *a)* $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} = e^{-1};$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 = e^2;$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/p}\right)^{n/p}\right]^p = e^p$$

34. $$\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n+1} = \left(\frac{n-2+1}{n-2}\right)^{n-2+3} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-2}\right)^{n-2}\cdot\left(1+\frac{1}{n-2}\right)^3 \to e.$$

35. $|a_n+b_n-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leqslant |a_n-a| + |b_n-b|$.
Pero,

$$\left.\begin{array}{r}\text{a partir de } h_1,\ |a_n-a| < \frac{\epsilon}{2}\\ \text{y a partir de } h_2,\ |b_n-b| < \frac{\epsilon}{2}\end{array}\right\}$$ por consiguiente, a partir

del mayor de los números h_1 y h_2, $|a_n+b_n-(a+b)| < \epsilon$.

36. *a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 1$;

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{\frac{4n^2}{n^2-1}}$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1}\right)^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{n^2-1}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^4;$$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{2n^2}{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{2n^2-2n}{n-1} + \frac{2n}{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{2n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n-1}}$$

$$= e \cdot 1 = e;$$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{3n}\right]}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{3n}} = 1^e = 1.$$

37. *a)* $3/2\sqrt{2}$; *b)* 0; *c)* $\to \infty$; *d)* e.

38. $1/2$.

39. $3/2$.

1.2

Funciones y continuidad

1. FUNCIONES Y GRAFICAS

Para establecer una función ha de concretarse cuál es el conjunto en el que se define (=dominio o campo de existencia), así como la imagen de cada elemento del dominio.

Las funciones que se manejarán en este capítulo tendrán por dominio un subconjunto D de los números reales R; en algunos casos será el propio R; a veces se dará el criterio o regla para hallar las imágenes de los elementos de D, sin especificar D. Se sobrentenderá —en esos casos— que D es el subconjunto más amplio en el que se puede aplicar el criterio.

Obsérvese que el criterio de obtención de la imagen de cada elemento no es único. En efecto: El criterio

$$y=(x+2)^2-(x-2)^2$$

permite calcular imágenes que coinciden con las que produce el criterio

$$y=8x.$$

Sin embargo, hay que tener cuidado en la identificación de criterios. Así, por ejemplo, $y=\sqrt{x^2}$ no es $y=x$, sino $y=|x|$.

Ejemplo 12

La función $x \to y$, tal que $y = \dfrac{1}{x-1}$, tendrá por dominio, si no se especifica otra cosa, $D = R - \{1\}$, ya que el criterio no tiene sentido para $x = 1$, valor para el que el denominador se hace cero; y cero no tiene inverso.

Ejemplo 13

La función $x \to y$, tal que $y = \sqrt{x^2 - 1}$, tendrá por dominio sobrentendido el subconjunto $D = \{x \in R / x^2 - 1 \geqslant 0\}$, ya que el criterio no tiene sentido para un radicando negativo.

Ejercicio 40

Determínese el dominio de las siguientes funciones:

a) $x \to \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$.

b) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. (Conviene fijarse en los ejemplos previos.)

c) $x \to \sqrt{x^2 - 5x + 4}$. (Recuérdese la discusión sobre el signo del trinomio de segundo grado.)

De cursos anteriores son conocidas las funciones polinómicas, de criterio muy sencillo, ya que para hallar la imagen de un elemento original sólo se utilizan las operaciones de sumar y multiplicar (la potenciación con exponente natural no es más que una forma convencional de un producto). Por otra parte, como estas operaciones están definidas uniformemente para todo par de reales, las funciones polinómicas son uniformes y admiten como dominio todo R.

Ejemplo 14

En la función $x \to y$, tal que $y = x^3 - 2x$, para hallar la imagen de un elemento $a \in R$, basta hallar $b = a^3 - 2a$.

El plano sirve para representar cómodamente el conjunto $R \times R$, eligiendo por ejemplo, un par de rectas perpendiculares.

$$\textit{ejes coordenados} \begin{cases} \textit{eje de abscisas} \\ \textit{eje de ordenadas,} \end{cases}$$

a cuya intersección, llamada *origen de coordenadas,* se hace corresponder el

(0, 0). Sobre cada uno de los ejes se señalan los puntos correspondientes a la unidad a partir del origen, que representarán, respectivamente, los pares (1, 0) y (0, 1).

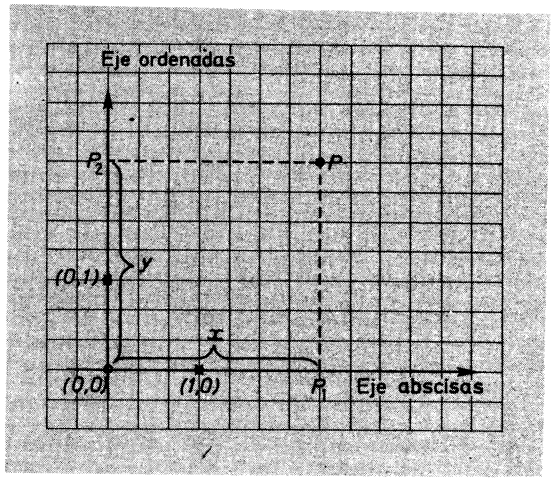


FIG. 1.9.

De esta forma se asigna a cada punto P del plano un par de números reales (x, y) que son sus coordenadas (abscisa y ordenada). Estos números coinciden con la distancia del origen a las proyecciones P_1 y P_2 de P sobre cada uno de los ejes, siguiendo la dirección del otro eje (Fig. 1.9).

Con estas convenciones, el subconjunto de puntos del plano correspondiente a una función $f: D \to R$, $D \subset R$, se denomina *gráfica de la función* $f \subset R \times R$.

Ejemplo 15

Sea la función f, tal que $x \to y = \frac{x}{2} - 3$.

Como no se indica expresamente el dominio y f es una función polinómica, ha de suponerse que el dominio es R.

Si se dan valores reales a x, se obtienen, mediante el criterio, las imágenes de dichos valores, algunas de las cuales se tabulan a continuación.

x	-2	-1	0	$0{,}5$	1	2	3	6	7
y	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}25$	$-2{,}5$	-2	$-1/5$	0	$0{,}5$

Al señalar en el plano los puntos correspondientes a los pares obtenidos, se obtiene una parte de la gráfica, una nube de puntos.

Los puntos dibujados sugieren el trazado de una recta, que es la gráfica de la función propuesta. Sin embargo, la situación general no es ésta, como puede verse en el ejercicio 45.

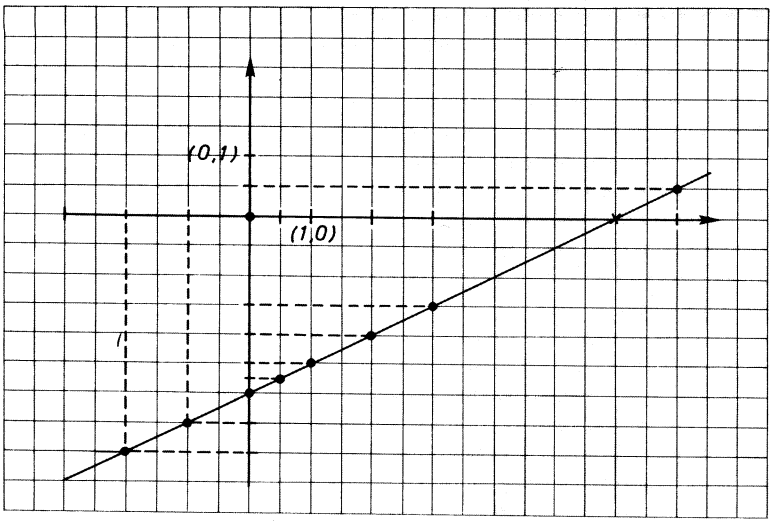


FIG. 1.10.

Ejercicio 41

Dénse las gráficas aproximadas por puntos de las siguientes funciones:

a) $x \to y$, $y = 4$;
b) $x \to y$, $y = x^2 - 2x + 1$;
c) $x \to y$, $y = |x|$ (valor absoluto de x).

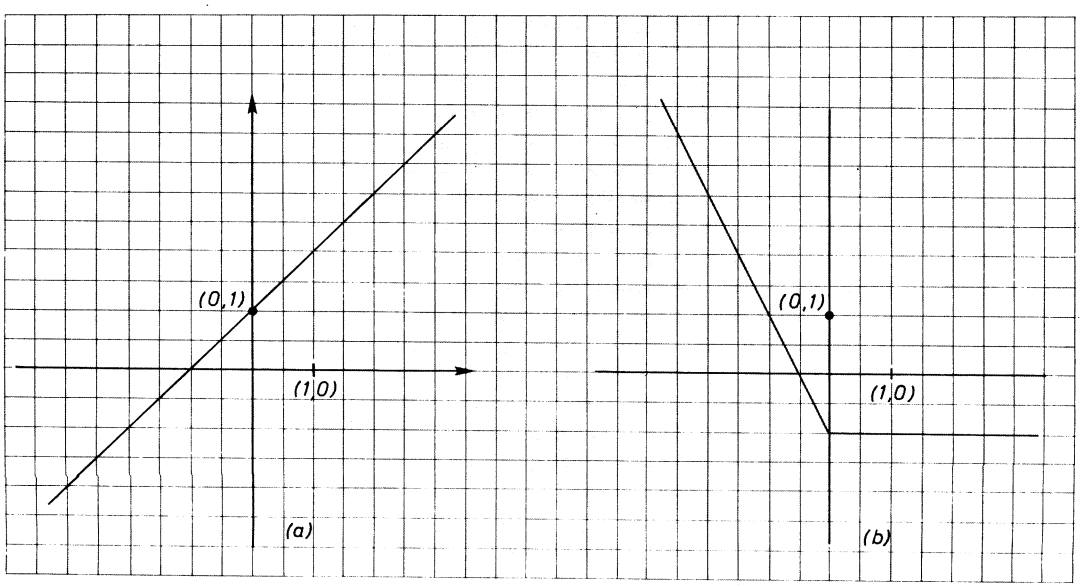


FIG. 1.11.

Ejercicio 42

Inténtese dar un criterio para cada una de las gráficas que se dibujan en la figura 1.11.

Ejercicio 43

Todo número real está comprendido en un intervalo único semiabierto, cuyos extremos son dos números enteros consecutivos, $[n, n+1]$. *Hállese la gráfica de la función que a cada* $x \in R$ *hace corresponder el extremo inferior del intervalo del tipo dicho, al que pertenece.*

Esta función se denomina parte entera de x *y se suele escribir* $y = E(x)$. *Su gráfica recuerda a una escalera. De nuevo se encontrará esta función cuando se defina* característica de un logaritmo.

Ejercicio 44

Represéntense en una sola figura las funciones f *y* g, *de dominio el intervalo* $[0, 1]$ *y tales que* $f(x) = x$ *y* $g(x) = 1 - x$.

Ejercicio 45

Quizá no se esté acostumbrado a manejar funciones en las que las imágenes de los distintos elementos del dominio se obtienen mediante distintos criterios, según las zonas a que pertenezcan dichos elementos. Inténtese conseguir esta destreza representando la función $h\colon [0, 1] \to R$, *tal que*

$$h(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \text{ es racional} \\ 1 - x, \text{ si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

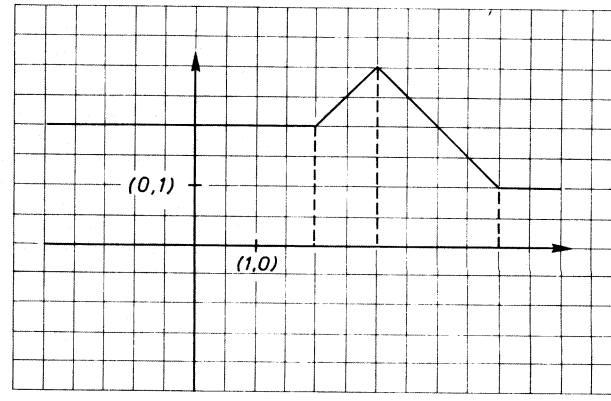


FIG. 1.12.

Ejemplo 16

Obsérvese la gráfica de la figura 1.12. Las imágenes de los elementos desde $-\infty$ a 2 son siempre iguales, $y=2$; luego, entre 2 y 3, las imágenes son iguales a los originales, $y=x$. Entre 3 y 5 las imágenes se obtienen mediante el criterio de la función polinómica $y=-x+6$. Finalmente, entre 5 y $+\infty$, las imágenes coinciden y valen $y=1$.

En resumen, se dirá que se trata de una función h de R en R, tal que

$$y=h(x)=\begin{cases} 2\ , & -\infty<x\leqslant 2 \\ x\ , & 2\leqslant x\leqslant 3 \\ -x+6\ , & 3\leqslant x\leqslant 5 \\ 1\ , & 5\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

Ejercicio 46

Represéntese la función $g\colon R\longrightarrow R$, *tal que*

$$g(x)=\begin{cases} -x\ , & -\infty<x\leqslant 0 \\ +x\ , & 0\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

(Consúltese, si es necesario, el tercer caso del ejercicio 41.)

Ejercicio 47

Establézcase un criterio para cada una de las funciones cuyas gráficas se dibujan en la figura 1.13.

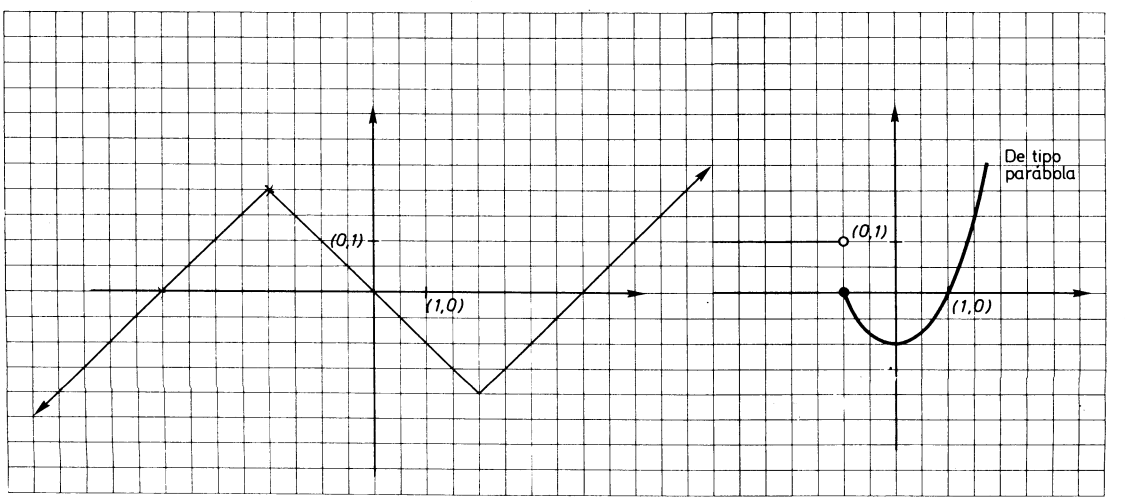


FIG. 1.13.

2. OPERACIONES CON FUNCIONES: ADICION Y MULTIPLICACION DE FUNCIONES

Apoyándose en la adición y en la multiplicación de números reales, es posible introducir una adición y una multiplicación de funciones. Estas operaciones gozan de algunas propiedades análogas a las que presentan las reales, respecto de la suma y el producto.

Sean f y g dos funciones reales y sean D_1 y D_2 sus dominios. Si se toma un elemento

$$x \in D_1 \cap D_2 ,$$

tendrán sentido $f(x)$ y $g(x)$; y como estas imágenes son números reales, también tendrá sentido $f(x)+g(x)$. En consecuencia, se puede considerar una nueva función definida en $D_1 \cap D_2$, tal que

$$x \longrightarrow y = f(x) + g(x).$$

Es razonable que esta función se designe por $f+g$.

Ejercicio 48

Determínese el dominio de las siguientes sumas de funciones:

a) $f+g : f(x)=\dfrac{2}{x-3} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}$;

b) $h+j : h(x)=\dfrac{x}{x^2-1} \qquad j(x)=3x^2-5.$

Ejercicio 49

Represéntese gráficamente en una sola figura las funciones f, g y f+g, siendo

$$f(x)=2x-1 \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{x-1}{2}.$$

Ejercicio 50

Determínese gráficamente en una sola figura las funciones I, E y I−E, siendo

$$I(x)=x \text{ (la función identidad);}$$
$$E(x)=\text{«parte entera de } x\text{»}.$$

De ser necesario, puede consultarse la resolución del ejercicio 43. Por razones obvias, podría denominarse a la función I−E, «parte decimal de x».

Ejemplo 17

Se habrá observado la facilidad de representación gráfica de la adición (o de la diferencia), si se tienen representados los sumandos. Basta un simple transporte de segmentos, tal como muestra la figura 1.14, para las funciones f, g y $f-g$.

$$f(x)=\frac{1}{2}x-2 \quad ; \quad g(x)=-\frac{1}{3}x+3.$$

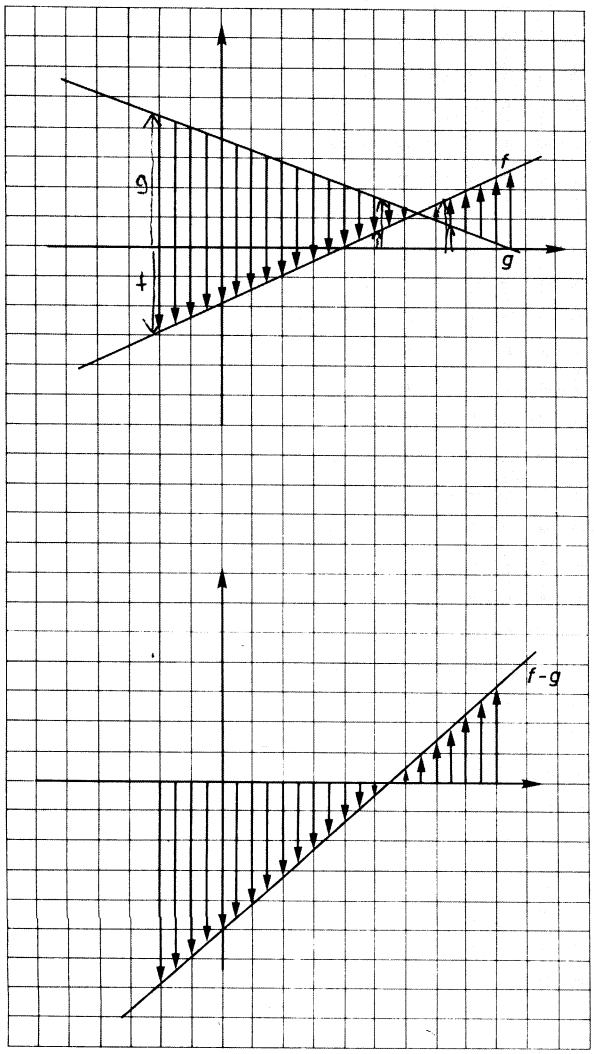


FIG. 1.14.

La función diferencia tiene por criterio

$$x \to f(x) - g(x) = \frac{5}{6}x - 5$$

Una vez establecida la *adición de funciones,* procede analizar las propiedades con que esa operación dota al conjunto de ellas.

Para saber si dos funciones son iguales habrá de comprobarse si tienen el mismo dominio y, además, si para cualquier elemento del dominio se obtiene la misma imagen.

Ejemplo 18

Tratemos de comprobar que si f, g y h son funciones reales definidas respectivamente en los dominios D_1, D_2 y D_3, son iguales las funciones

$$(f+g)+h \quad \text{y} \quad f+(g+h)$$

La función $f+g$ tiene por dominio $D_1 \cap D_2$; la función $(f+g)+h$ tiene por dominio $(D_1 \cap D_2) \cap D_3$. Pero por la propiedad asociativa de la intersección, también se puede escribir que su dominio es $D_1 \cap (D_2 \cap D_3)$ o, simplemente, $D_1 \cap D_2 \cap D_3$.

Por otra parte, la función $g+h$ tiene por dominio $D_2 \cap D_3$ y la función $f+(g+h)$ tiene el $D_1 \cap (D_2 \cap D_3)$, que es igual al de la anterior.

Ahora, para ver si ambas dan de cada elemento x del dominio la misma imagen, habrá que desarrollar, pacientemente, la imagen de un elemento cualquiera

$$\begin{aligned}
[(f+g)+h](x) &\overset{[1]}{=} (f+g)(x) + h(x) \overset{[1]}{=} \\
&\overset{[2]}{=} [f(x)+g(x)] + h(x) \overset{[1]}{=} \\
&= f(x) + [g(x)+h(x)] \overset{[1]}{=} \\
&= f(x) + (g+h)(x) = \\
&= [f+(g+h)](x)
\end{aligned}$$

Las igualdades [1] se basan en la propia definición de la adición de funciones; la [2] lo hace en la propiedad asociativa de los números reales.

Tras el análisis realizado, se puede concluir:

> La adición de funciones es asociativa.

Ejercicio 51

Justifíquese que $f+g=g+f$; *es decir, que*

la adición de funciones es conmutativa.

Ejercicio 52

Represéntese gráficamente la función nula $x \longrightarrow y=0$, *que denotaremos* $0(x)=0$. *Dése la función* $f+0$. *Con ello, se concluirá que*

la adición de funciones tiene elemento neutro.

Además, represéntese sobre una misma figura un par de funciones $x \longrightarrow y=f(x)$ *y* $x \longrightarrow y=-f(x)$. *Por evidentes razones, la segunda se denotará* $-f$. *Hállese la suma de* $f+(-f)$.

La función $-f$ *recibe el nombre de* función opuesta *(simétrica)* de f.

La realización de esta parte del ejercicio sugiere establecer:

Toda función tiene opuesta en la adición.

Las propiedades analizadas en el ejemplo 18 y en los ejercicios 51 y 52 permiten escribir, para funciones con el mismo dominio *:

Las funciones reales con la operación adición alcanzan estructura de grupo abeliano.

Se pasa ahora a definir otra operación: la *multiplicación de funciones.*

Sean f y g dos funciones reales. Como $f(x)$ y $g(x)$ son números reales, $f(x) \cdot g(x)$ también es un número real único, y

$$x \longrightarrow y=f(x) \cdot g(x)$$

es una nueva función, producto de las dos dadas, $f \cdot g$, cuyo dominio, como antes, es la intersección de los dominios de f y de g.

Ejercicio 53

Demuéstrese que

1. $(f \cdot g) \cdot h=f \cdot (g \cdot h)$ (asociatividad);
2. $f \cdot g=g \cdot f$ (conmutatividad);
3. *La función constante* $x \longrightarrow y=1$ (que denotaremos 1) *cumple que* $f \cdot 1=1 \cdot f$ (existencia de función unidad).

---

* En rigor, la adición no ha quedado definida en el caso de que la intersección de los dominios sea vacía.

Ejemplo 19

Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo 18, y de los ejercicios 51 y 52, se pasa a demostrar que

> la multiplicación de funciones es distributiva respecto de la adición.

Es decir, que $(f+g)\cdot h = f\cdot h + g\cdot h$. En efecto:

a) Los dominios de las funciones de ambos miembros son iguales:

$$\begin{aligned} D_{(f+g)} \cap D_h &= (D_f \cap D_g) \cap D_h = \\ &= (D_f \cap D_h) \cap (D_g \cap D_h) = \\ &= D_{(f\cdot g)} \cap D_{(g\cdot h)}; \end{aligned}$$

b) la imagen de cada elemento es igual en ambas:

$$\begin{aligned} [(f+g)\cdot h](x) &\overset{[1]}{=} (f+g)(x)\cdot h(x) \overset{[1]}{=} [f(x)+g(x)]\cdot h(x) \overset{[3]}{=} \\ &= f(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h(x) \overset{[1]}{=} (f\cdot h)(x) + (g\cdot h)(x) \overset{[2]}{=} \\ &= (f\cdot h + g\cdot h)(x). \end{aligned}$$

Las igualdades [1] se apoyan en la definición de multiplicación de funciones; las igualdades [2] en la de la adición y la [3] se basa en la distributividad del producto de los números reales, respecto de la suma.

Ejercicio 54

Represéntense las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & , \quad -\infty < x \leqslant 1 \\ 0 & , \quad 1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x \leqslant 1 \\ 2x-2 & , \quad 1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

Determínese si alguna de las dos es la función nula. ¿Lo es su producto $f\cdot g$?

Tal vez los resultados del ejercicio anterior hayan sido sorprendentes, porque constituyen una situación nueva, que no se daba ni en N, ni en Z, ni en Q, ni en R, ni en C. Allí, dos elementos distintos de cero nunca daban como producto cero. En cambio, el producto de dos funciones no nulas —como se acaba de ver— pueden producir la función nula. Para indicar esto, se dice que el conjunto de las funciones reales con el producto tiene *divisores de cero.*

Ejercicio 55

Establézcanse tres funciones f, g y h tales que $f \neq 0$, $f \cdot g = f \cdot h$, *y, sin embargo,* $g \neq h$.

Si se ha logrado realizar el ejercicio anterior, es casi inmediato demostrar que la función f encontrada *no tiene inversa* ***respecto*** *del producto.*

En efecto, supóngase que j fuera la inversa respecto del producto, es decir, que

$$j \cdot f = f \cdot j = 1;$$

entonces,

$$f \cdot g = f \cdot h \Longrightarrow j \cdot f \cdot g = j \cdot f \cdot h \Longrightarrow 1 \cdot g = 1 \cdot h \Longrightarrow g = h,$$

en contra del resultado obtenido en el ejercicio 55.

Conviene resumir los resultados obtenidos hasta aquí:

Funciones reales

Adición	**Multiplicación**
— Asociatividad	— Asociatividad
— Conmutatividad	— Conmutatividad
— Existe función cero	— Existe función unidad
— Toda función tiene opuesta	— Admite divisores de cero (hay funciones sin inversa)

— Distributividad de la multiplicación respecto de la adición

Sin embargo, a pesar de la cuarta propiedad tabulada para la multiplicación, como todos los números reales tienen inverso en el producto, excepto el cero, y $f(x)$ es un número real, se puede pensar en la función

$$x \to y = \frac{1}{f(x)},$$

que tiene sentido en todo el dominio de f, excepto en los puntos en que $f(x) = 0$.

Entonces, es posible también hablar del *cociente de funciones,* teniendo en cuenta que su dominio será

$$D_{(f/g)} = (D_f \cap D_g) - \{x / g(x) = 0\}.$$

Ejercicio 56

Establézcase el dominio del cociente de la función «parte entera de x» por la función «parte decimal de x», y viceversa; es decir, de

$$x \to y = \frac{E(x)}{x - E(x)} \quad ; \quad x \to y = \frac{x - E(x)}{E(x)}$$

Conviene recordar los ejercicios 44 y 50.

3. COMPOSICION DE FUNCIONES. FUNCION INVERSA

Imagínese un x del dominio de f cuya imagen $f(x)$ sea un número real del dominio de g que, de él, producirá la imagen $g[f(x)]$.

Para el conjunto D de estos elementos x es posible definir una función, denotada

$$g \circ f$$

y que se lee «g compuesta f» y también, lamentablemente, «producto de f por g», que tiene la siguiente forma:

$$g \circ f : x \to y = g[f(x)]$$

Ejemplo 20

Sea

$$f : x \to y = 3x - 2$$
$$g : x \to y = x^2$$

Entonces,

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x - 2) = (3x - 2)^2$$

Y también,

$$f : x \to y = \sqrt{x^3}$$
$$g : x \to y = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$$

Su composición produce:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x^3}) = \frac{\sqrt{x^3} + 1}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}$$

Ejercicio 57

Hállese $f \circ g$, *en los dos casos del ejemplo anterior. Se ha de llegar a la conclusión de que*

$$\boxed{\text{no siempre } f \circ g = g \circ f}$$

Ejercicio 58

Decídase si $f \circ g = g \circ h$, *en los dos casos que se proponen*

$$a) \begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x-1} \\ g(x) = f(x) \end{cases} \qquad b) \begin{cases} f(x) = 3x - 2 \\ g(x) = \dfrac{x+2}{3} \end{cases}$$

Conviene concretar algo más el dominio de la función compuesta $g \circ f$.

Sea D_1 el dominio de f y D_2 el dominio de g; llamemos $f^{-1}(D_2)$ el conjunto de originales cuya imagen está en D_2. El dominio de $g \circ f$ se expresará $D_1 \cap f^{-1}(D_2)$.

Ejemplo 21

Sean

$$f : x \to y = \frac{2+x}{3-x}$$

$$g : x \to y = \sqrt{x}$$

El dominio de f es todo R excepto $x = 3$, ya que para ese valor se anula el denominador de la fracción que define f:

$$D_1 = R - \{3\};$$

el dominio de g es el subconjunto de los reales positivos. Ahora bien, los originales con imagen positiva por f serán los que cumplan

$$\frac{2+x}{3-x} \geqslant 0$$

Pero un cociente es positivo si numerador y denominador son simultáneamente o positivos o negativos:

$2 + x$ es positivo para $-2 \leqslant x < +\infty$; negativo para $-\infty < x \leqslant -2$

$3 - x$ es positivo para $-\infty \leqslant x \leqslant 3$; negativo para $3 \leqslant x < +\infty$

Intersecciones: $[-2, 3]$; ϕ

Es decir:

$$f^{-1}(D_2) = [-2, 3] \cup \phi = [-2, 3]$$

En definitiva, el dominio de $g \circ f$ es

$$D_1 \cap f^{-1}(D_2) = (R - \{3\}) \cap [-2, 3] = [-2, 3)$$

Ejercicio 59

Hállese el dominio de la función compuesta $f \circ g$, siendo f y g las funciones del ejemplo anterior.

Ejercicio 60

Sin discutir la igualdad de dominios —cuestión que en este caso se complica un poco— demuéstrese la igualdad de las funciones

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

con lo que se habrá establecido que

la composición de funciones es asociativa.

Ejercicio 61

Compruébese que la aplicación idéntica I: $x \to x$ es una función tal que

$$I \circ f = f \circ I = f,$$

lo que indica que

la composición de funciones tiene elemento neutro.

Resumiendo en un cuadro lo que se lleva analizado, se escribe:

***Composición** de funciones reales*
— Asociativa. — No conmutativa. — Tiene elemento neutro, que es la función identidad.

Si la función f es *uniforme* (=cada original tiene una sola imagen) y *unívoca* (=originales distintos tienen imágenes distintas), resultará ser *biunívoca*, si se toma como conjunto final el conjunto-imagen, porque en ese caso también es *exhaustiva*.

Ejemplo 22

Sea $f:[0, 1] \to R$, $x \to y = x^2$, la función representada en la figura 1.15. Procedamos a su análisis.

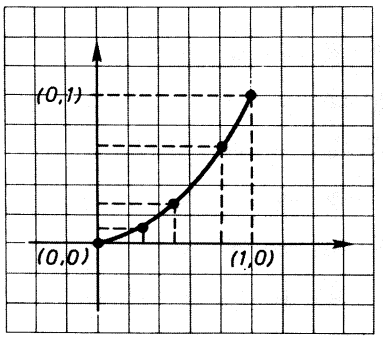


FIG. 1.15.

1.º Su dominio de definición es [0, 1].
2.º El conjunto de imágenes o *recorrido* vuelve a ser el intervalo cerrado [0, 1].
3.º Es uniforme, ya que $\forall\, x \in [0, 1]$, el valor de x^2 es único.
4.º Es unívoca (inyectiva), es decir: $x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.

En efecto:

$$x_1^2 = x_2^2 \iff x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

Pero en R no existen divisores de cero; por tanto,

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -x_2 \\ \quad \text{ó} \\ x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

La posibilidad $x_1 = -x_2$ ha de desecharse en [0, 1], excepto si $x_1 = 0 = -x_2 = x_2$, luego $x_1 = x_2$, como se pretendía demostrar.

En definitiva, f ha resultado ser una función biunívoca (biyectiva), como función de [0, 1] en [0, 1].

Ejercicio 62

Estúdiese la función $g: [-2, 2] \to R$, $x \to y = x^3$ *y compruébese si es biunívoca sobre su recorrido, que habrá de determinarse.*

A partir de una función unívoca y exhaustiva, por supuesto sobre su recorrido, es decir, a partir de una función biunívoca f, se obtiene fácilmente

una nueva función g, cuyo dominio D' es el recorrido de f y que tiene por criterio el que consiste en asignar a cada elemento de D' su antecedente en D. Esta función se denomina *función inversa* de f, y suele denotarse $g=f^{-1}$. (Otra vez se advierte del peligro de confundirla con una posible inversa de la multiplicación de funciones, con la que nada tiene que ver.)

En notación formal:

> Si $f: D \to D'$ es biunívoca, se define:
>
> $$f^{-1}=g:\ D' \to D,\ \text{tal que}\ x \to y,\ \text{si}\ f(y)=x.$$

Ejemplo 23

En el ejemplo 22, f era biunívoca de $[0, 1]$ en $[0, 1]$.

Por f,

$$0{,}2 \to 0{,}04 \ ; \quad 0{,}4 \to 0{,}16 \ ; \quad 0{,}6 \to 0{,}36 \ ; \quad 0{,}8 \to 0{,}64 \ ; \quad 1 \to 1$$

pues bien, g aplicará

$$0{,}04 \to 0{,}2 \ ; \quad 0{,}16 \to 0{,}4 \ ; \quad 0{,}36 \to 0{,}6 \ ; \quad 0{,}64 \to 0{,}8 \ ; \quad 1 \to 1;$$

y así, en otros puntos. Es decir:

$$g:\ [0, 1] \to [0, 1] \ , \quad x \to y = +\sqrt{x}$$

En resumen, los pares ordenados (x, y) de g son los de f, pero con las proyecciones o componentes cambiadas de orden. Este hecho se traduce en la gráfica de g en que es simétrica a la de f, respecto a la bisectriz del primer cuadrante, como se puede apreciar en la figura 1.16.

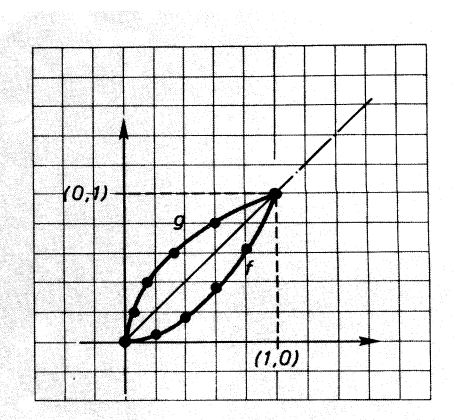


FIG. 1.16.

Se sabe que la raíz cuadrada de un número positivo es doble, $\pm\sqrt{x}$. La función g del ejemplo recién establecido sólo es $+\sqrt{x}$. Tal vez se advierta el motivo en el siguiente

Ejercicio 63

¿Admite función inversa la función $f\colon [-1, 1] \to R$, $x \to y = x^2$? *Razónese.*

Ejercicio 64

Analícese si la función inversa de la función inversa de f *vuelve a ser* $f\colon (f^{-1})^{-1} = f$. *Reflexiónese; no conviene «abandonarse» a la fuerza de los símbolos.*

Ejercicio 65

¿Qué ocurre si se hace la composición de una función f *con su inversa? Compruébese con las funciones del ejemplo 23, que*

$$g \circ f = f \circ g = I$$

Ha de advertirse que no basta que $g \circ f = I$ *para asegurar que* g *es la función inversa de* f; *hay que asegurarse, también, de que* $f \circ g = I$, *ya que, en general, la operación composición no es conmutativa.*

Interesará conocer un *método para obtener el criterio* de la función inversa, a partir del criterio de la función inicial. Véase el

Ejemplo 24

Sea f la función $y = \dfrac{3x+1}{2x+3}$.

Determinemos x en función de y

$$y(2x+3) = 3x+1$$
$$2yx - 3x = 1 - 3y$$
$$(2y-3)x = 1 - 3y$$
$$x = \frac{1-3y}{2y-3}$$

Como hasta ahora se ha venido llamando x a los elementos originales e y a las imágenes, convendrá cambiar los símbolos x e y para obtener definitivamente

$$y = \frac{1-3x}{2x-3}$$

como criterio de la función inversa f^{-1}.

Ejemplo 25

Sea $f: x \to y = 3 + (+\sqrt{x})$.

De modo parecido al anterior, se hace el desarrollo

$$y - 3 = +\sqrt{x}$$
$$(y-3)^2 = x$$

Cambiando la notación de las variables,

$$y = (x-3)^2$$

Se recomienda que se determinen los dominios de f y de f^{-1} de este ejemplo.

Ejercicio 66

Hállense las funciones inversas de las siguientes funciones:

a) $f: x \to y = \dfrac{x-3}{2}$;

b) $g: x \to y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

c) $h: x \to y = \dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$.

Ejercicio 67

Se pregunta si $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ *o bien* $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. *Quizá ayude el comprobarlo para las funciones f y g del ejercicio anterior. ¿Tiene algo que ver la cuestión con que la composición no sea conmutativa?*

Ejercicio 68

Represéntense gráficamente las funciones inversas de

a) $f: x \to y = 2x - 4$;
b) $g: [1, 4] \to R$, $x \to y = x^2 - x$.

4. LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Sea f una función de dominio $D \subset R$, donde D es un intervalo abierto si no se advierte lo contrario en R y (a_n), $a_n \in D$, una sucesión de números reales. No es difícil comprender que $(f(a_n))$ es también una sucesión de números reales, la sucesión de las imágenes. Esta sucesión es la aplicación compuesta $f \circ a$, de N en R

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{a} & D & \xrightarrow{f} & R \\ n & \longrightarrow & a_n & \longrightarrow & f(a_n) \end{array}$$

Ejemplo 26

Sea f la función constante $x \to y = 3$; y (a_n) la sucesión $n \to a_n = \dfrac{n+1}{n}$, de límite 1.

Entonces, la sucesión $(f(a_n))$ es la $(3, 3, 3, \ldots)$, que tiene límite 3.

Sea g la función $x \to y = \dfrac{1}{x-1}$; y (b_n) la sucesión $n \to b_n = 1 + 10^{-n}$, de límite 1.

Entonces, la sucesión $(g(b_n))$ es la

$$\left(\frac{1}{1+10^{-n}-1}\right) = \left(\frac{1}{10^{-n}}\right) = (10^n),$$

que tiende a infinito.

Ejercicio 69

Hállense las sucesiones-imagen por $f: x \to y = 3x - 3$, *de las sucesiones*

$$(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \quad ; \quad (b_n) = (2n+1).$$

Determínense sus límites, si los tienen.

Depende de la función f que la sucesión de imágenes de una sucesión convergente sea convergente o no, como se ha podido comprobar sobre el ejemplo 26.

> Se dice que b *es el límite de la función* f *en el punto* a si, para toda sucesión $(x_n) \subset D$ que converge hacia a, el límite de la sucesión imagen $(f(x_n))$ existe y es b. Notación:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Esta definición es de difícil manejo en orden a demostrar que una función tiene por límite un número b, cuando x tiende hacia a, ya que las sucesiones que tienden a a son infinitas.

Sin embargo, de modo negativo sí es útil: bastará hallar una sucesión que tienda hacia a y que la sucesión de imágenes no tenga límite, o bien encontrar dos sucesiones cuyas imágenes tengan límite distinto, para asegurar que no existe límite en el punto.

Ejemplo 27

Demuéstrese que la función

$$f: x \to y = \begin{cases} 2\ , & -\infty < x \leqslant 1 \\ 3\ , & 1 < x \leqslant +\infty \end{cases}$$

no tiene límite en el punto 1.

En la figura 1.17 se ha construido la gráfica de f.

Se consideran las sucesiones $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ y $\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Ambas tienden a 1, pero la primera siempre es mayor que 1, por lo que la sucesión de imágenes $\left(f\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ es la sucesión constante (3); mientras que la segunda es siempre menor que la unidad, por lo cual la sucesión de imágenes $\left(f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ será la sucesión constante (2). En conclusión

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ no existe.}$$

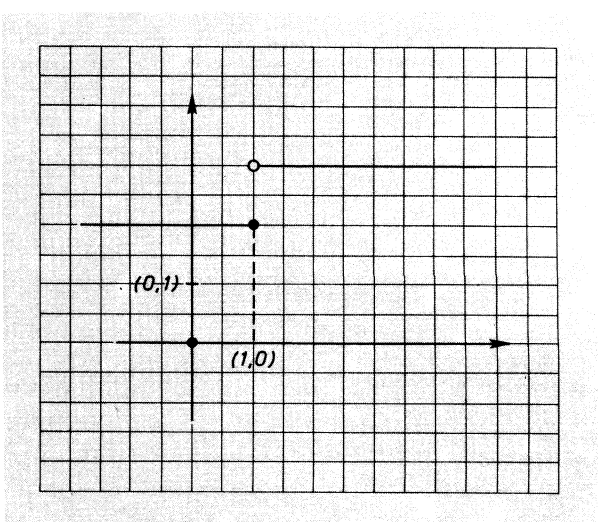


FIG. 1.17.

Al mismo resultado se hubiera llegado si se hubiera considerado la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

que oscila en torno al punto 1.

Ejercicio 70

Sea la función

$$y = \frac{1}{x-1}.$$

No está definida en el punto 1, *pero la definición de límite no lo exige. Demuéstrese que la sucesión de imágenes de la sucesión* $(1+10^{-n})$ *tiende a* $+\infty$ *(es decir, no existe límite). Justifíquese también que la sucesión de imágenes de la sucesión* $(1-10^{-n})$ *tiende a* $-\infty$.

Sobre la figura 1.18 *puede observarse el comportamiento de la gráfica en las cercanías del punto* 1.

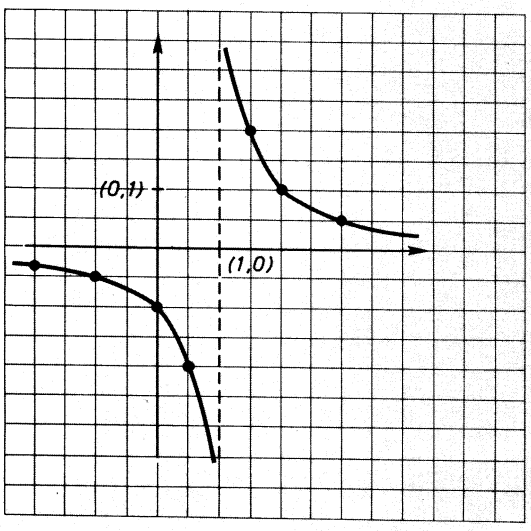


FIG. 1.18.

Ejercicio 71

Estúdiese el límite de la función f del ejemplo 27 *en el punto* $a=2$.

Estúdiese, también, el límite de la función identidad I, en un punto cualquiera.

La noción de límite de una función en un punto, con independencia del concepto de límite de sucesiones es:

> $b \in R$ es límite de la función f en el punto a si $\forall \epsilon \in R^+$, $\exists \delta \in R^+$, tal que $0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |b-f(x)|<\epsilon$.

En una palabra, se exige que en las cercanías de a la función tome valores cercanos a b. Por otra parte, al imponer que $0<|x-a|<\delta$, se impide que $x=a$, es decir, el punto a puede no ser del dominio de f.

Las propiedades de los límites de las sucesiones conducen a propiedades similares de los límites de funciones, propiedades que facilitan el cálculo de dichos límites, reduciéndolo al cálculo de funciones más sencillas.

Sea

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)=c.$$

Entonces,

1. $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b\pm c=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}=\lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x)$ (siempre en el supuesto de que $c\neq 0$).
4. $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=b^c=(\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Ejemplo 28

Por el ejercicio 71 se sabe que la función $I: x\to y=x$ tiene límite en cualquier punto a, siendo precisamente el valor del límite, a

$$\lim_{x\to a} I(x)=a.$$

Así, por la propiedad 2, $\lim_{x\to a} x^2=a^2$; y, en general,

$$\lim_{x\to a} x^n=a^n \ , \quad \forall\, n\in N.$$

También por la propiedad 2, $\lim_{x\to a} 3x=3a$; y, de modo general,

$$\lim_{x\to a} kx=ka.$$

En fin, por las propideades 1 y 2, el límite en el punto a de cualquier función polinómica será

$$\lim_{x\to a} p(x)=p(a).$$

Ejercicio 72

Hállense los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+1)$; *b)* $\lim_{x\to -4}(x^3+x)$; *c)* $\lim_{x\to 0}(x+4)^2$.

Ejercicio 73

Teniendo en cuenta la propiedad 3, calcúlense los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^4+x-3}$;

b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{2x+4}$;

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x^5+3x^2+1}$.

Si el numerador y denominador de un cociente de polinomios se anulan en el mismo punto a, es porque ambos son múltiplos de $(x-a)$. Una vez simplificado ese factor común, se puede intentar el cálculo del límite.

Ejercicio 74

Calcúlense los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$;

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$.

Ejercicio 75

Determínense:

a) $\lim_{x\to 6}\sqrt[3]{x^2-9}$;

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ (conviene eliminar los radicales del denominador).

La noción de límite de una función en un punto se generaliza «permitienlo» que la variable x tienda a infinito (∞). En esta situación es posible que las imágenes se «acerquen» a un valor concreto que denominaremos límite en el infinito.

Ejemplo 29

Hállese

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{2x^3-x-2}.$$

Dividamos numerador y denominador por la mayor potencia de x, que es x^3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x^2+1}{2x^3-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+1/x^3}{2-1/x^2-2/x^3}=\frac{\lim 1-\lim(3/x)+\lim(1/x^3)}{\lim 2-\lim(1/x^2)-\lim(2/x^3)}=$$
$$=\frac{1-0+0}{2-0-0}=\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 76

Calcúlense:

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^3-4}$; *b)* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-5}{|2x^3+3|}$.

Puede suceder también que nos encontremos con *límites infinitos* en puntos «finitos». La figura 1.19 ofrece la gráfica de una función que presenta esta situación. Analícese en las cercanías del punto 1. Estúdiese

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{|x-1|}.$$

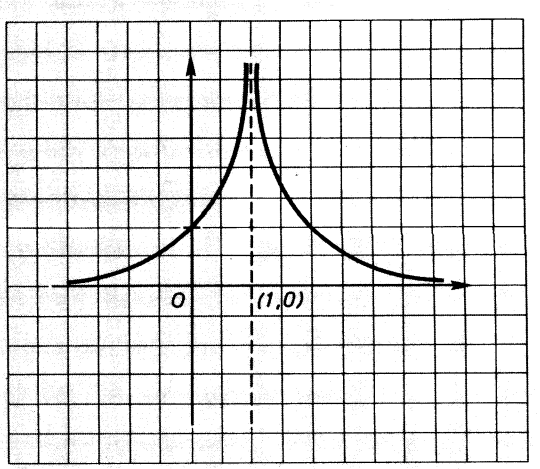


FIG. 1.19.

En el estudio de límites de funciones surgen a menudo los casos de indeterminación que ya se examinaron en el capítulo anterior y que en notación convencional eran

$$\infty - \infty \; ; \quad 0 \cdot \infty \; ; \quad \frac{0}{0} \; ; \quad ; \quad 0^0 \; ; \quad \infty^0 \; ; \quad 1^\infty$$

Ya se han resuelto algunos casos de los tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. El estudio de los logaritmos permitirá resolver otras indeterminaciones.

Si un límite funcional en un punto es cero, se dice que la función es un *infinitésimo en ese punto.* Por ejemplo, las funciones

$$x, \; x^2, \; x^3, \; \ldots$$

son infinitésimos en el punto 0; y las funciones

$$x - 2 \quad ; \quad (x-2)^5 \quad ; \quad \frac{(x-2)^3}{x+4},$$

son infinitésimos en el punto 2.

El cociente de dos infinitésimos puede comportarse de los cuatro modos distintos que se describen a continuación:

1. *El cociente de dos infinitésimos puede tender a cero.*
   Se dice, entonces, que el infinitésimo numerador es de orden superior al denominador, con lo que se quiere indicar que el numerador tiende a cero «más rápidamente».
2. *El cociente de dos infinitésimos puede tender a infinito.*
   Ello indica que el infinitésimo numerador es de orden inferior al denominador.
3. *El cociente de dos infinitésimos puede tender a un valor finito b, distinto de* 0.
   Cuando sucede esto, los dos infinitésimos son del mismo orden.
4. *El cociente de dos infinitésimos puede tender a* 1 (caso particular de 3).
   Dos infinitésimos del mismo orden que presentan esta situación se llaman infinitésimos equivalentes.

En la figura 1.20 puede observarse la distinta manera de «acercarse a cero» de las funciones x, x^2, x^3 y x^4.

Ejercicio 77

Compárense los infinitésimos

a) $(3x-6)$ y $(\sqrt{x} - \sqrt{2})$, cuando $x \to 2$;

b) $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ y $\frac{(x-1)^3}{x^3-1}$, cuando $x \to 1$.

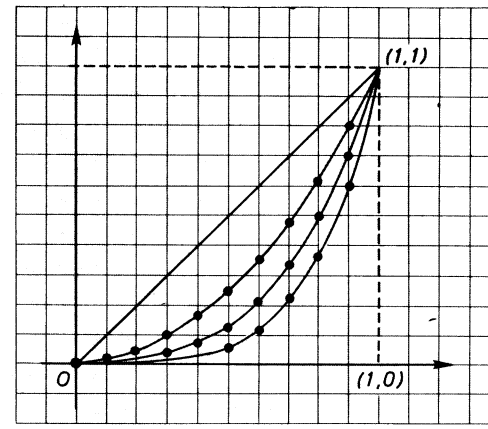


FIG. 1.20.

Ejercicio 78

Demuéstrese que la suma de infinitésimos es del orden del infinitésimo sumando de menor orden y que el producto de infinitésimos presenta un orden superior al de cualquiera de los factores.

De modo parecido se comparan los órdenes de límites infinitos.

5. CONTINUIDAD

Una función real f, definida en D es continua en un punto a, si

1.º $a \in D$;

2.º $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Expresado en forma negativa, f no será continua en a si, o bien no está definida en a, o bien no tiene límite en a, o bien dicho límite no coincide con el valor de la función en a.

Ejemplo 30

Sea la función

$$f: x \to y = \begin{cases} 2, & -\infty < x \leqslant 1 \\ 3, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \\ 1, & 3 < x < +\infty, \end{cases}$$

cuya gráfica se dibuja en la figura 1.21.

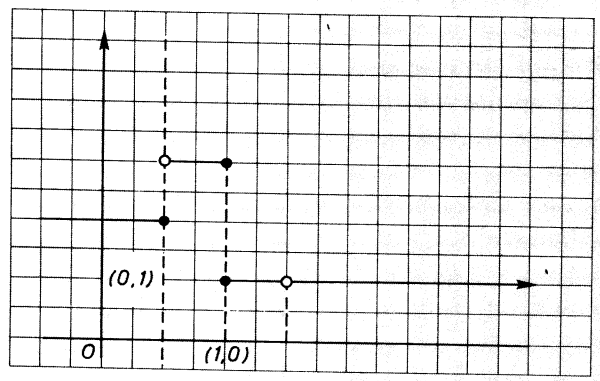


FIG. 1.21.

La función es discontinua en 1 y en 2, porque no tiene límite; en cambio, en 3 tiene límite ($\lim_{x \to 3} f(x) = 1$), pero no es continua porque no está definida en ese punto.

Ejercicio 79

Repasando los conceptos del apartado anterior, razónese que las funciones polinómicas son continuas en cualquier punto.

Ejercicio 80

Analícese en qué puntos es continuo el cociente de dos funciones polinómicas.

Ejercicio 81

Demuéstrese que la función $y = E[x]$ *(parte entera de* x*) es continua en* $x = 1/2$ *y discontinua en* $x = 3$.

Ejercicio 82

Justifíquese que la función $y = x - E[x]$ *(parte decimal de* x*) es continua en* $x = 3/4$ *y discontinua en* $x = 2$.

Ejercicio 83

Estúdiese la función $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ *en las proximidades de los puntos* $x = \pm 3$.

Ejercicio 84

Establézcase el conjunto de puntos en los que la función $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ *es continua.*

Conviene saber manejar una definición de continuidad, independiente de la noción de límite de sucesiones.

> Una *función* real f, definida en D es *continua en un punto* a, si
>
> 1.º $a \in D$;
>
> 2.º $\forall\, \epsilon \in R^+,\ \exists\, \delta \in R^+$, tal que
>
> $$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

En la figura 1.22 se da una interpretación intuitiva geométrica de la continuidad.

Siendo $f(a)$ la imagen de a y $(f(a) - \epsilon,\ f(a) + \epsilon)$ un intervalo cualquiera, centrado en $f(a)$, f será continua en a si hay un intervalo centrado en a,

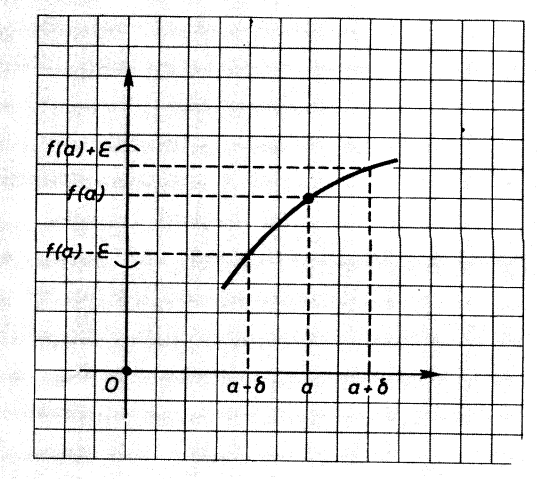


FIG. 1.22.

$(a-\delta,\ a+\delta)$, tal que las imágenes de los elementos de este intervalo ($|x-a|<\delta$) estén en el otro intervalo ($|f(x)-f(a)|<\epsilon$).

Se trata de comprobar que la función $x \to y = x^2$ es continua en el punto $a=3$.

$$f(a) = a^2 = 9.$$

Exijamos que $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ y hallemos una condición sobre la distancia que puede haber entre x y a.

$$|x^2-9|<\epsilon \implies |(x-3)(x+3)|<\epsilon \implies |x-3|\,|x+3|<\epsilon.$$

Ahora bien, si imponemos que x diste de 3 menos de una unidad, el valor máximo que puede tomar $|x+3|$ es 6. Por tanto, bastará que se cumpla

$$6|x-3|<\epsilon \quad ; \quad |x-3|<\frac{\epsilon}{6}.$$

Es decir, basta con que la distancia de x a 3 sea menor que 1 y menor que $\frac{\epsilon}{6}$, para que $|x^2-9|<\epsilon$.

Así, pues, se ha encontrado para un ϵ cualquiera, un δ

$$\delta = \text{mínimo de } \left(1,\ \frac{\epsilon}{6}\right),$$

para el que se cumple, si $|x-3|<\delta$, $|x^2-3^2|<\epsilon$.

Ejercicio 85

Observando que $x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$ *y que si* x *dista de* 2 *menos de una unidad,* $|x^2+2x+4|<19$, *demuéstrese que la función* $y=x^3$ *es continua en el punto* 2.

Ejercicio 86

Justifíquese que la función constante y la función identidad son continuas.

Enunciemos en un cuadro cuatro propiedades de la continuidad de funciones:

Si f y g son funciones continuas en un punto a, también son continuas en a las funciones

1. $f+g$;
2. $f-g$;
3. $f \cdot g$;
4. f/g (con $g(a) \neq 0$).

A estas propiedades ha de añadirse el comportamiento de la función compuesta, respecto a la continuidad. Para este estudio, habrá de suponerse que la segunda función es continua en el punto imagen de la primera. Formalmente:

> Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $(g \circ f)$ es continua en a.

La figura 1.23 da la marcha intuitiva de la demostración que sigue, utilizando el eje de ordenadas, primero, para la representación del conjunto imagen de f y, luego, del dominio de g.

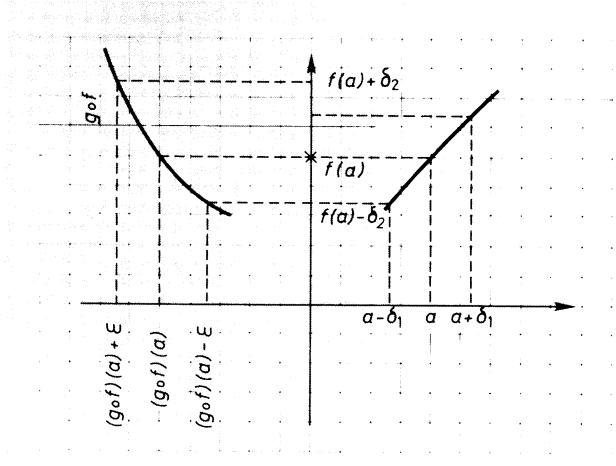


FIG. 1.23.

Para que $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon$, o lo que es igual, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$, bastará que $|f(x) - f(a)| < \delta_2$, ya que g es continua en $f(a)$. Ahora bien, para que $|f(x) - f(a)| < \delta_2$, es suficiente que $|x - a| < \delta_1$, puesto que f es continua en a.

Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ se puede asegurar la existencia de un δ_1, tal que, si

$$|x - a| < \delta_1 \implies |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon.$$

Ejercicio 87

Discútase la continuidad de la función $x \to y = (E(x))^2$.

Ejercicio 88

Estúdiese la continuidad de la función $x \to y = \sqrt{\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}}$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.2

40. *a)* $R-\{-1, 1\}$; *b)* $R-[-1, 1]$; *c)* $R-(1, 4)$.

41.

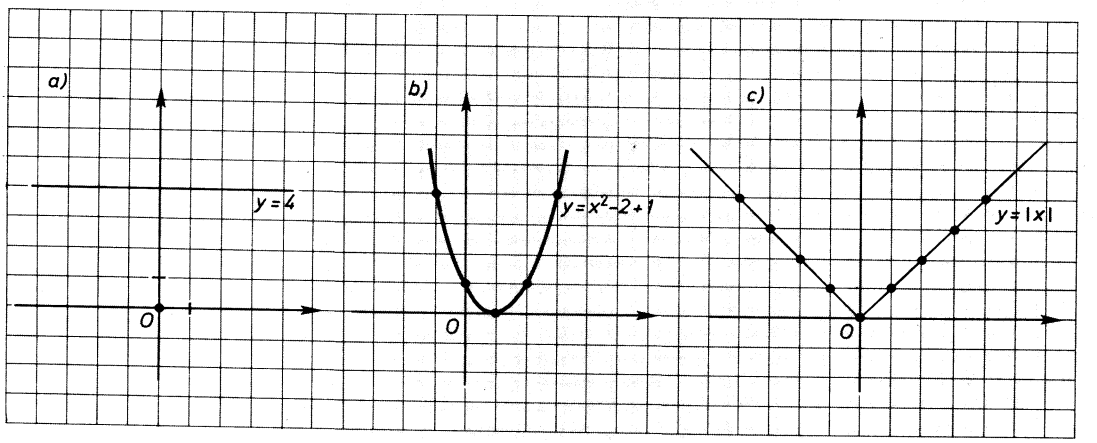


FIG. 1.24.

42. *a)* $y=x+1$; *b)* $y=|x|-x-1$.

43.

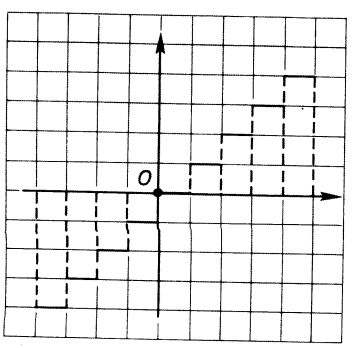


FIG. 1.25.

44.

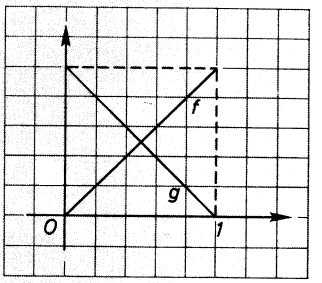


FIG. 1.26.

45.

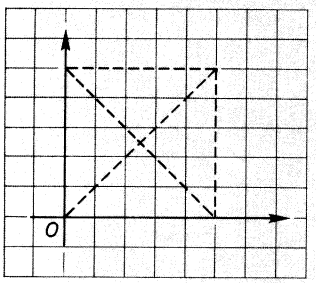


FIG. 1.27.

46.

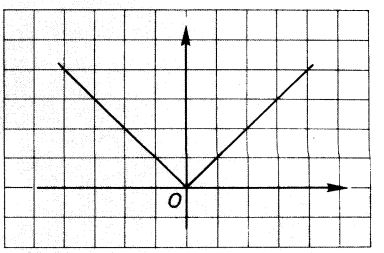


FIG. 1.28.

47. $f(x)=\begin{cases} x+4\ , & -\infty<x\leqslant -2 \\ -x\ , & -2<x\leqslant 2 \\ x-4\ , & 2<x<+\infty \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} 1\ , & -\infty<x<-1 \\ x^2-1\ , & -1\leqslant x<+\infty \end{cases}$

48. *a)* Dominio de $f+g$: $R-(\{3\}\cup(-\infty, 1))$;
b) Dominio de $h+j$: $R-\{-1, 1\}$.

49.

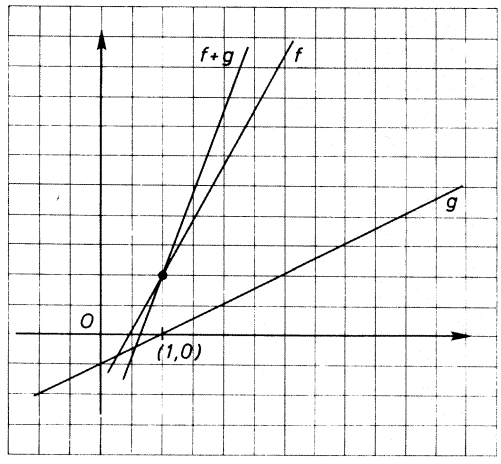


FIG. 1.29.

50.

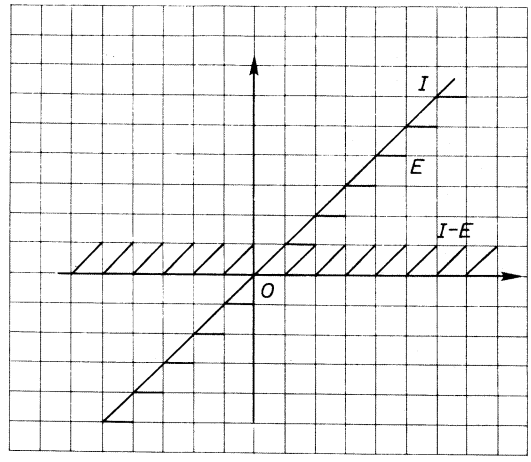


FIG. 1.30.

51. $D_{(f+g)}=D_f\cap D_g=D_g\cap D_f=D_{(g+f)}$.

$$(f+g)(x)\overset{[1]}{=}f(x)+g(x)\overset{[2]}{=}g(x)+f(x)\overset{[1]}{=}(g+f)(x)$$

Las igualdades [1], por definición de la adición; la [2], por la conmutatividad de la adición en R.

52.

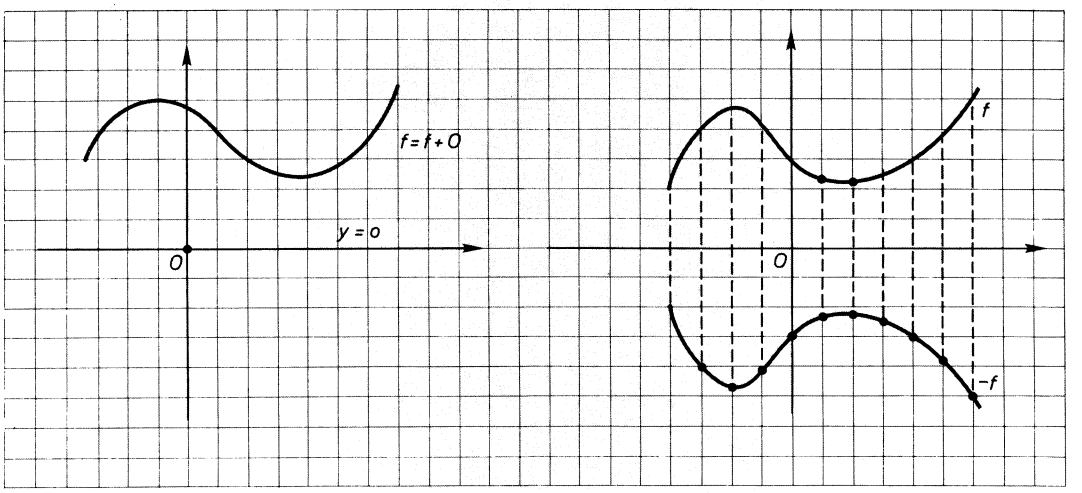


FIG. 1.31.

53. $D_{[(f\cdot g)\cdot h]} = D_f \cap D_g \cap D_h = D_{[f\cdot(g\cdot h)]}$

$$[(f\cdot g)\cdot h](x) = (f\cdot g)(x)\cdot h(x) = (f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x)) =$$
$$[1] \qquad [1] \qquad [2]$$
$$= f(x)\cdot(g\cdot h)(x) = [f\cdot(g\cdot h)](x)$$
$$[1] \qquad [1]$$

Las igualdades [1], por definición de la multiplicación; la [2], por la propiedad asociativa del producto en R.

La justificación de 2 y 3, análoga a lo expuesto, no ofrece dificultad alguna.

54. Su producto es nulo y ninguna de ellas es nula.

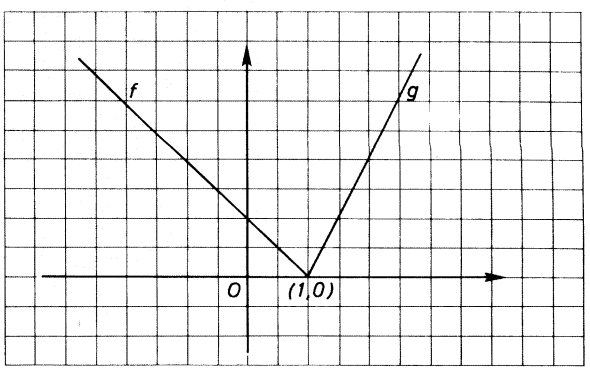


FIG. 1.32.

55. Tómese como f y g las funciones del ejercicio anterior y como h la función

$$h(x)=\begin{cases} 0 \ , & -\infty<x<3 \\ x^3-27, & 3\leqslant x<+\infty \end{cases}$$

56. Dominio de $\dfrac{E(x)}{x-E(x)}=R-Z$;

Dominio de $\dfrac{x-E(x)}{E(x)}=R-[0,\,1)$.

57. Caso 1.º:

$$(f\circ g)(x)=3x^2-2\neq(3x-2)^2=(g\circ f)(x);$$

Caso 2.º:

$$(f\circ g)(x)=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3}\neq\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}=(g\circ f)(x).$$

58. *a)* $f\circ g=g\circ f=I$ (con dominio $R-\{1\}$);

b) $f\circ g=g\circ f=I$ (con dominio R).

59. $(f\circ g)(x)=\dfrac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$;

$$D_{(f\circ g)}=D_g\cap g^{-1}D_f=(R^+\cup\{0\})\cap g^{-1}(R-\{3\})=(R^+\cup\{0\})-\{9\}.$$

60. $[(f\circ g)\circ h](x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))=f((g\circ h)(x))=[f\circ(g\circ h)](x)$.
Todos los pasos de la demostración se apoyan en la definición de la operación.

61. $(I\circ f)(x)=I(f(x))=f(x)=f(I(x))=(f\circ I)(x)$.

62. Recorrido de $g=[-8,\,8]$. Es biunívoca de $[-2,\,2]$ en $[-8,\,8]$.

63. No, porque no es unívoca (inyectiva) en el dominio dado.

64. f^{-1} da como imagen de un elemento del recorrido su original; $(f^{-1})^{-1}$ produce como imagen de este original su imagen.

65. $g\circ f=f\circ g=I$.

En el ejemplo 23,

$$(g\circ f)(x)=+\sqrt{x^2}=x=(+\sqrt{x})^2=(f\circ g)(x).$$

66. *a)* $f^{-1}: x \to y = 2x + 3$;

b) $g^{-1}: x \to y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

c) $h^{-1}: x \to y = \left(\dfrac{3x-3}{x+1}\right)^2$

67. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, ya que $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ I \circ g = I$. En cambio no se puede asegurar que $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1} = I$, puesto que la composición no es conmutativa.

68.

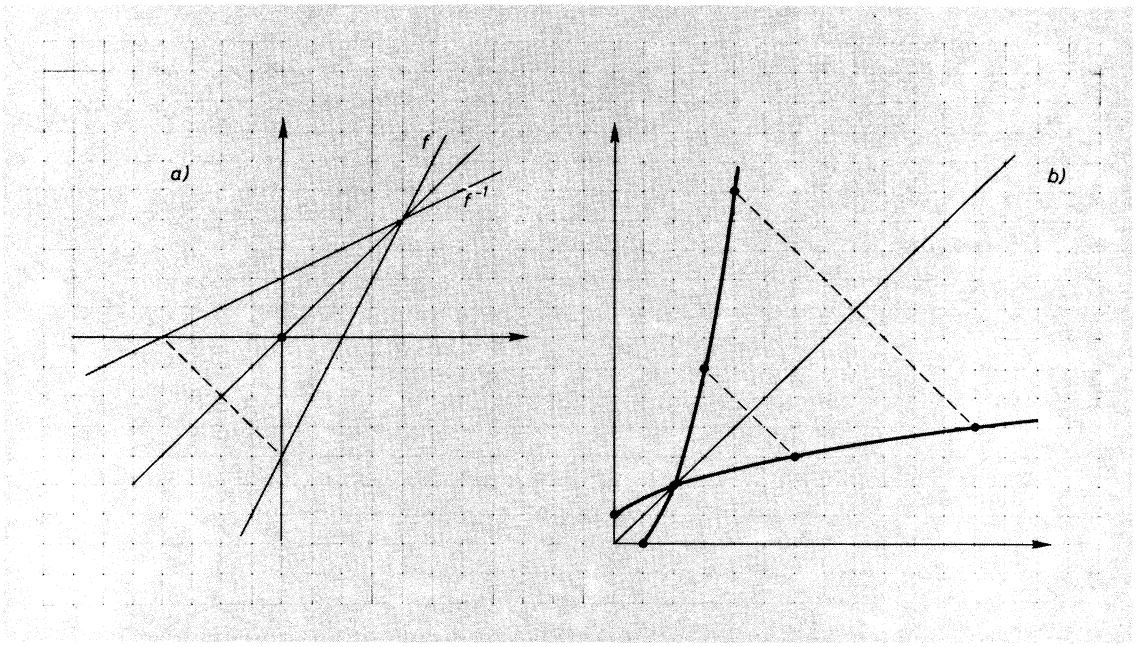


FIG. 1.33.

69. *a)* $\left(3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - 3\right) \to 3e - 3$;

b) $3(2n+1) - 3 = 6n \to +\infty$.

70. $\dfrac{1}{1+10^{-n}-1} = \dfrac{1}{10^{-n}} = 10^n > k$, para todo $k \in R$, para n suficientemente grande.

$\dfrac{1}{1+10^{-n}-1} = \dfrac{1}{-10^{-n}} = -10^n < k$, para todo $k \in R$, para n suficientemente grande.

71. No tiene límite, ya que la sucesión imagen de la sucesión $2-\frac{1}{n}$ tiende a 2 y la sucesión imagen de la sucesión $2+\frac{1}{n}$ tiende a 3.

Como $I(x)=x$, si la sucesión (x_n) tiende a a, la sucesión $(I(x_n))=(x_n)$ también tiende a a. Es decir, coinciden los límites de la sucesión de originales y de la sucesión de imágenes.

72. *a)* 3; *b)* -68; *c)* 16.

73. *a)* 1; *b)* -1; *c)* 0.

74. *a)* 2/3; *b)* $-1/4$; *c)* $\pm\infty$ (se ha de aplicar la regla de Ruffini).

75. *a)* 3; *b)* $8\sqrt{2}$.

76. *a)* 0; *b)* 1/12.

77. *a)* Son del mismo orden. Límite del cociente, $6\sqrt{2}$;
b) Son del mismo orden. Límite del cociente, 3/2.

78. Si

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 0, \qquad \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}\to 1,$$

es decir, $f+g$ es equivalente a g, de orden mayor que f.

$$\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\to 0, \qquad \frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\to 0,$$

por consiguiente, $(f\cdot g)(x)$ es de orden superior a f y a g.

79. Como $\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$, $\forall\, a\in R$, $p(x)$ es continua en todo R.

80. Será continuo en todo R, salvo en los puntos que anulan el denominador, en los cuales no está definido. Pero si simultáneamente se anula el numerador, el cociente puede tener límite en aquel punto.

81. Toda sucesión de límite 1/2 tiene por imagen una sucesión que tiende a cero, que es el valor de $E(1/2)$.

La sucesión $\left(3+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ tiene por imagen una sucesión oscilante (2, 3, 2, 3, ...), que no tiene límite.

82. En 3/4 es continua porque I y E son continuas en 3/4, lo cual implica la continuidad en su diferencia.

En 2 no es continua, porque I es continua en 2 y E no es continua en 2. Su diferencia no puede ser continua en 2.

83. A la izquierda de -3 tiende a $+\infty$. A la izquierda de 3 tiende a $-\infty$. A la izquierda de 3 tiende a $-\infty$. A la derecha de 3 tiende a $+\infty$ (Fig. 1.34).

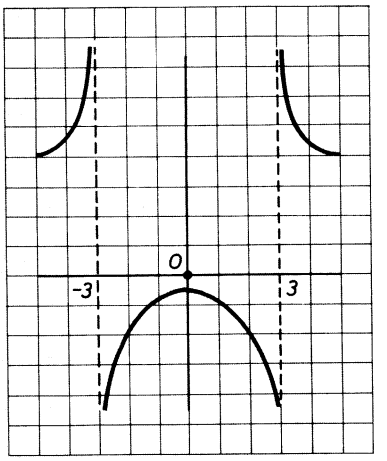


FIG. 1.34.

84. $R-[1, 2]$.

85. $|x^3-2^3|=|x-2|\ |x^2+2x+4|<\epsilon \iff |x-2|<\dfrac{\epsilon}{|x^2+2x+4|}$.

Si se toma $|x-2|<1 \Longrightarrow x<3$, con lo cual $|x^2+2x+4|$ como máximo vale 19. Por consiguiente, si se toma $|x-2|<\dfrac{\epsilon}{19}$ y $|x-2|<1$, aseguramos que $|x^3-2^3|<\epsilon$.

86. Si $f\colon x \to y=a$, $|f(x)-f(a)|=0<\epsilon$, $\forall\, x \in R$.
Si $f\colon x \to y=x$, $|f(x)-f(a)|=|x-a|<\epsilon$, basta tomar $|x-a|<\epsilon$, para que $|f(x)-f(a)|<\epsilon$, ya que son iguales.

87. Discontinua en $Z \subset R$.

88. Continua en $R-[-1, 1]$.

1.3

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Establézcase el término general de la sucesión

$$\frac{3}{-3}, \frac{6}{1}, \frac{9}{5}, \frac{12}{9}, \ldots,$$

y justifíquese que su límite es 3/4.

2. La sucesión

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \ldots \frac{2n-1}{3n}$$

tiene por límite A. Calcúlese el término de ella a partir del cual sucede que $|a_k - A| < 1/10$.

3. Determínese el término n-simo y calcúlese el límite de la sucesión

$$\frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \ldots$$

4. Calcúlese el límite de la sucesión

$$\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{12}, \frac{16}{19}, \ldots$$

5. Hállese

$$A = \lim_{x \to \infty} 2x \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^3} + \ldots + \frac{x}{x^3} \right).$$

6. Determínese

$$\lim_{z \to \infty} \left[\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} \right) + \ldots + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z}{z} \right) \right].$$

7. El término general de una sucesión es $\frac{n^2+2}{2n^2-1}$. Establézcanse sus primeros términos y calcúlese su límite.

8. Establézcase el número real $e+\pi$, con dos sucesiones monótonas convergentes.

9. Calcúlense los límites

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}.$$

10. Determínese

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}.$$

11. Hállese

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}.$$

12. Calcúlese

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}.$$

13. ¿Qué valor tiene el

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}?$$

14. Justifíquese que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=e^{x}.$$

15. Calcúlese

$$\lim_{n\to 0}\sqrt[n]{1+n}.$$

16. Discútase si es creciente o decreciente la sucesión

$$\left(\frac{3-5n}{n-4}\right).$$

17. Dada la sucesión

$$\left(\frac{8}{-3}, \frac{11}{-7}, \frac{14}{-11}, \frac{17}{-15}, \cdots\right),$$

establézcase su término general y analícese si es creciente o decreciente.

18. Establézcase razonadamente el dominio de la función $y=\sqrt{x^2-1}$.

19. ¿Cuál es el dominio de la función

$$y = \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \ ?$$

20. Dígase cuál es el campo de existencia de la función $y = \sqrt{(1-x)(x+2)}$.

21. Establézcase el dominio de la función $y = L(49 - x^2)$. (Para actualización final de curso.)

22. Hállese para qué valores reales está definida la función

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}.$$

23. Determínese el dominio de la función

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{x-2}}.$$

24. ¿En qué subconjunto real está definida la función

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1?$$

25. Analícese el crecimiento de la función $y = \frac{6}{x}$.

26. Establézcanse los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

$$y = -x^2 + 7x - 12.$$

27. Estúdiese el crecimiento de la función $y = \frac{3}{x-1}$.

28. Hállense los puntos de discontinuidad de la función $y = \frac{5x-1}{x^2-1}$.

29. Estúdiese la continuidad de la función $y = \sqrt{16 - x^2}$.

30. Determínense los puntos de discontinuidad de la función $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

31. Hállense los puntos en los que la función $y = \frac{3x+7}{x^3 + 2x^2 - 35x}$ no es continua.

32. Dada la función $y = \frac{1+2x}{2-5x}$, establézcase su función inversa.

33. Determínese la función inversa de $y = L(2+x)$. (Para actualización final de curso.)

34. Calcúlese la función inversa de $y = 1 + e^{2x+1}$. (Para actualización final de curso.)

35. Dibújese la gráfica de la función inversa de $y = \frac{x-1}{x+2}$.

36. Calcúlese

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

37. Determínese razonadamente

$$\lim_{z\to\infty}(\sqrt{1+z}-\sqrt{z}).$$

38. Siendo

$$f=\frac{x^2-2x}{x^3+x} \quad \text{y} \quad g=\frac{x^3-5x}{x^2-3x},$$

calcúlese cuando x tiende a infinito

a) $\lim f$; *b)* $\lim g$; *c)* $\lim f\cdot g$; *d)* $\lim f/g$; *e)* $\lim (f-g)$.

39. Hállese

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}.$$

40. Calcúlese

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-x^3+x^2-2x+1}.$$

41. Determínese

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+8n+1}).$$

42. Compárense, cuando $x\to 1$, los infinitésimos $y=x^2-7x+6$ e $y=(x-1)^2$.

43. Establézcase en todas sus características la función compuesta de

$$y=3x-1 \quad \text{y}$$
$$y=+\sqrt{x}.$$

44. Analícense si son componibles las funciones:

$$y=x^2-x+5$$
$$y=-x^2+4x-4.$$

45. Determínese el dominio de la función compuesta $f\circ g$, siendo

$$f: x\to y=\frac{2+x}{3-x}$$
$$g: x\to y=\sqrt{x}.$$

46. Establézcanse los dominios de f y de f^{-1}, siendo $f: x\to y=3+(+\sqrt{x})$.

1.4

Autoevaluación A-1

1. Una relación E es antisimétrica sobre A si, y sólo si,

a) $\forall\, a, b \in A,\ (a, b) \in E \wedge (b, a) \in E \Longrightarrow a = b$;
b) $\forall\, a, b \in A,\ a = b,\ (a, b) \in E \Longrightarrow (b, a) \notin E$;
c) $\forall\, a, b \in A,\ a \neq b,\ (a, b) \wedge (b, a) \in E$;
d) $(a\ E\ b) \wedge (b\ E\ a)$.

2. La relación de divisibilidad («x divide a y») es relación

a) de orden en Z;
b) de equivalencia;
c) antisimétrica;
d) antisimétrica en N.

3. Se dice que (A, E) es un orden total si

a) la relación E sobre A es reflexiva;
b) $\forall\, a, b \in A,\ a \neq b,\ (a, b) \in E \veebar (b, a) \in E$;
c) la relación E sobre A es antisimétrica;
d) $\forall\, a, b \in A,\ a \neq b,\ (a, b) \vee (b, a) \in E$.

4. Una aplicación estrictamente monótona creciente es

a) inyectiva e invierte el orden;
b) una biyección que conserva el orden;
c) una inyección que conserva el orden;
d) una función sin saltos bruscos.

5. Una aplicación monótona decreciente es

a) una inyección que invierte el orden;
b) una biyección que invierte el orden;
c) aquella que invierte el orden;
d) una función con, al menos, un salto brusco.

6. Una aplicación constante de N en Z es monótona

a) creciente;
b) decreciente;
c) creciente y decreciente, simultáneamente;
d) es que no es monótona.

7. Si se dispone de dos funciones monótonas crecientes, la función compuesta de ambas

a) sigue siendo monótona creciente;
b) no se puede asegurar nada;
c) depende de los conjuntos ordenados;
d) es monótona, pero no se sabe si creciente o decreciente.

8. Si para dos números a y b sucede en R que $\exists\, c \in R^+ \cup \{0\}/a+c=b$,

a) es que se trata del mismo número;
b) que c está entre los dos;
c) $a<b$;
d) $a \leqslant b$.

9. Siendo $\{A, \leqslant\}$ un conjunto ordenado y $B \subset A$, no vacío, se denomina cota superior de B a un $a \in A$,

a) tal que todo elemento de B es menor o igual que a;
b) $/\forall\, b \in B\ ,\ b \leqslant a$;
c) $/\forall\, b \in A\ ,\ a \leqslant b$;
d) $/\forall\, b \in B\ ,\ b<a$.

10. Extremo superior de B es

a) la cota más alta de las superiores;
b) la cota menor de las superiores;
c) la única cota superior;
d) la más próxima al límite.

11. $a \in A$ es ..... de $B \in A$, si $\forall\, a'$ cota superior de B, $a' \leqslant a$. Para que resulte un establecimiento correcto, los puntos suspensivos deben sustituirse por:

a) cota superior;
b) extremo inferior;
c) extremo superior.
d) elemento-límite.

12. Intervalo cerrado $[a, b]$ de un conjunto ordenado A es

a) un conjunto de puntos de extremos a y b;
b) un conjunto ordenado de puntos x, tales que $a<x<b$;
c) $\{x \in A/a<x \leqslant b\}$;
d) $\{x \in A/a \leqslant x \leqslant b\}$.

13. Intervalo abierto (a, b) de un conjunto A, ordenado totalmente es:

a) $(a, b) = \{x \in A \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$;
b) $(a, b) = \{x \in A \,/\, a < x < b\}$;
c) $|a, b) = \{x \in A \,/\, a \leqslant x < b\}$;
d) $(a, b| = \{x \in A \,/\, a < x \leqslant b\}$.

14. Los extremos superior e inferior del intervalo $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset N$, son

a) $\sqrt{2}$ y $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$;
b) 2 y 3;
c) 2;
d) 1,4 y 2,3.

15. Los extremos superior e inferior del intervalo $(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset Q$, son

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$;
b) $\sqrt{2}$ y 3;
c) 1,4... y 2,3...;
d) no tiene extremos.

16. De las cuatro igualdades entre valores absolutos que se expresan, sólo una es correcta. Descúbrase.

a) $|a-b| = -|b-a|$;
b) $|a-b| = |b-a|$;
c) $|a-b| = |a| + |-b|$;
d) $|a+b| = |-a| - |-b|$.

17. Distancia de dos puntos (a, b) es

a) su diferencia de abscisas;
b) la aplicación $(a, b) \rightarrow |b-a|$;
c) la medida del segmento;
b) $|b| - |a|$.

18. Si sucede que $\forall\, \epsilon \in R^+,\ \exists\, h \in N / \forall\, n > h,\ n \in N,\ |a_n - a| < \epsilon$, se puede decir que

a) $\lim\limits_{n \to 0} a_n = a$;
b) (a_n) es convergente hacia a;
c) la función tiene límite;
d) la sucesión tiende a cero.

19. El número e es un número trascendente porque

a) es un límite;
b) no es racional;
c) no es raíz de ninguna polinómica racional $p(x) = 0$;
d) es ilimitado.

20. La gráfica de la función $y=E(x)$ es

a) segmentaria;
b) escalonada;
c) intermitente;
d) continua en R^+.

21. La adición dota al conjunto de las funciones reales de estructura de

a) semigrupo abeliano con elemento neutro;
b) anillo;
c) grupo;
d) grupo abeliano.

22. El producto de dos funciones no nulas

a) es una función no nula;
b) es un divisor de cero;
c) puede ser nula;
d) depende del cuerpo.

23. La composición de funciones es

a) conmutativa siempre;
b) no conmutativa, en general;
c) depende de los dominios;
d) conmutativa, si son unívocas.

24. Si sucede que $f \circ g = I$, puede asegurarse que

a) g es la función inversa de f;
b) f es la función inversa de g;
c) no se puede asegurar que se trata de funciones inversas;
d) produce la función identidad.

25. Si el punto a no pertenece al dominio de $y=f(x)$,

a) el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe;
b) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;
c) puede existir $\lim_{x \to a} f(x)$;
d) $f(x)$ es continua en a.

26. Un infinitésimo en a es

a) una sucesión que tiende a a;
b) una sucesión cuyo límite en a es cero;
c) $|f(x)-f(a)|=0$;
d) una función nula en a.

27. Sucede que $(\lim_{x\to a} f(x)) : (\lim_{x\to a} g(x)) = 1$. Eso indica que

a) $f(x)$ y $g(x)$ son funciones iguales;
b) $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos no nulos;
c) se trata de dos infinitésimos equivalentes en a;
d) nada se puede inferir, salvo lo que ha quedado establecido.

28. Siendo $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, si $\lim_{x\to a} f(x) : \lim_{x\to a} g(x) = 1$,

a) se trata de infinitésimos equivalentes;
b) son infinitésimos del mismo orden 1;
c) no es posible ese cociente, pues es indeterminado;
d) son funciones de gráficas simétricas.

29. Si $f(x)$ es continua en $a \in D$, es porque

a) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;
b) $|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$;
c) su gráfica no presenta salto ni punto anguloso en a;
d) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

30. El cociente de dos funciones continuas

a) es una función continua;
b) depende de si el dominio de la primera es subconjunto del recorrido de la segunda;
c) es continua, excepto en los puntos que anulan la función divisor, no haciéndolo la dividendo;
d) es un infinitésimo equivalente.

31. Si f es continua en a y g lo es en $f(a)$, puede asegurarse que

a) $f \circ g = I$;
b) $g \circ f = I$;
c) $f \circ g$ es continua en a;
d) $g \circ f$ es continua en a.

32. Dadas las funciones

$$g : N \to N \ , \ g(n) = 6n - 5$$
$$h : Z \to N \ , \ h(z) = + \sqrt{z^2},$$

estúdiese la monotonía de la función $g \circ f$.

33. Establézcanse los extremos superior e inferior de $(0, \pi) \subset Q$.

34. Calcúlese $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/2n)^n$.

35. Hállese $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

36. Determínese $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2-2}{2n^3-n+3}$.

37. Establézcase el dominio de la función

$$x \to \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

38. Dibújese la gráfica de la función

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < -1 \\ x^2 - 1, & -1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

39. Determínese el dominio de la función $g \circ f$, siendo

$$f : x \to y = \frac{2+x}{3-x}$$

$$g : x \to y = \sqrt{x}$$

40. Establézcase la función inversa de

$$h : x \to y = \frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}.$$

41. Determínese

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-5}{|2x^3+3|}.$$

42. Justifíquese que la función $y = E(x)$ es continua en $x = 1/2$.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-1

1. *a).*	**7.** *a).*	**13.** *b).*	**19.** *c).*	**25.** *c).*
2. *d).*	**8.** *d).*	**14.** *c).*	**20.** *b).*	**26.** *b).*
3. *b).*	**9.** *a).*	**15.** *d).*	**21.** *d).*	**27.** *d).*
4. *c).*	**10.** *b).*	**16.** *b).*	**22.** *c).*	**28.** *a).*
5. *c).*	**11.** *b).*	**17.** *b).*	**23.** *b).*	**29.** *a).*
6. *c).*	**12.** *d).*	**18.** *b).*	**24.** *c).*	**30.** *c).*

31. *d).*

32. Véase la contestación del ejercicio 8.

33. Coincide con la cuestión *h* del ejercicio 21.

34. Compruébese con la solución del ejercicio 32.

35. Está resuelto en el ejemplo 8.

36. Constituye el ejemplo 9.

37. Véase la solución de la parte *a)* del ejercicio 40.

38. La solución es la gráfica de la derecha de la figura 1.13.

39. Coincide con el ejemplo 21.

40. Véase la solución del ejercicio 66 *c).*

41. Es la cuestión *b)* del ejercicio 76.

42. Consúltese la solución del ejercicio 81.

UNIDAD TEMATICA 2

FUNCIONES TRASCENDENTES ELEMENTALES

2.1. Función exponencial

1. *Homomorfismos*
2. *Funciones exponenciales de base 2 y de base 10*
3. *La función exponencial de base a*
4. *Generación de sucesiones con límite e*

2.2. Función logarítmica

1. *La función inversa de la exponencial* $y = a^x$
2. *El isomorfismo logarítmico*
   - 2.1. Establecimiento. Bases
   - 2.2. Análisis de la función logarítmica $y = L_a x$
3. *Propiedades y cálculos logarítmicos*
   - 3.1. Logaritmo de un producto
   - 3.2. Logaritmo del inverso de un real positivo. Co-logaritmo
   - 3.3. Logaritmo de un cociente
   - 3.4. Logaritmo de una potencia de exponente entero
   - 3.5. Logaritmo de una raíz de índice $n \in N$
   - 3.6. Logaritmo de una potencia de exponente racional
   - 3.7. Característica y mantisa
   - 3.8. Convenio de escritura para los logaritmos negativos

4. *Instrumentos para cálculos logarítmicos*
   - 4.1. Tablas de logaritmos
   - 4.2. Calculadoras
   - 4.3. La regla de cálculo
   - 4.4. Papeles logarítmicos y semilogarítmicos
5. *Relación entre funciones logarítmicas de distinta base. Cambio de base*
6. *Ecuaciones logarítmicas y exponenciales*
   - 6.1. Ecuaciones exponenciales
   - 6.2. Ecuaciones logarítmicas
   - 6.3. Sistemas de ecuaciones logarítmicas

2.3. Funciones circulares

1. *Goniometría*
2. *Sistemas de referencia. Angulos positivos y negativos*
3. *Razones goniométricas*
   - 3.1. Establecimiento
   - 3.2. Signo de las razones goniométricas de un ángulo
   - 3.3. Relaciones entre las razones goniométricas
4. *Segmentos goniométricos. Circunferencia unidad*
5. *Relaciones goniométricas entre ángulos de distintos cuadrantes*
   - 5.1. Angulos que se diferencian en un número entero de vueltas
   - 5.2. Angulos suplementarios
   - 5.3. Angulos que se diferencian en π radianes
   - 5.4. Angulos cuya suma es un ángulo completo
   - 5.5. Angulos complementarios
   - 5.6. Angulos que se diferencian en $\pi/2$ radianes
6. *Funciones circulares*
   - 6.1. Función seno
   - 6.2. Función coseno
   - 6.3. Función tangente
   - 6.4. Función cosecante
   - 6.5. Función secante
   - 6.6. Función cotangente
7. *Funciones inversas de las circulares continuas*
8. *Ecuaciones trigonométricas*
9. *Trigonometría del triángulo rectángulo*

2.4. Ejercicios y problemas de recapitulación

2.5. Autoevaluación A-2

2.1

Función exponencial

1. HOMOMORFISMOS

El concepto de homomorfismo es uno de los más importantes de la matemática de las estructuras. Para establecer un homomorfismo son necesarios tres objetos: dos conjuntos estructurados y una aplicación.

Ejemplo 1

Sea el conjunto de los reales, dotados de la adición, o sea, el grupo $(R, +)$. Considérese también el conjunto de los complejos, C, con la adición; es decir, el grupo aditivo $(C, +)$. Finalmente, se establece la aplicación f que hace corresponder a cada real a la imagen en C, $(a, 0)$:

$$f(a) = (a, 0).$$

Sucede que:

— en el grupo $(R, +)$, $a + b = c$;

— las imágenes complejas de a y de b son $f(a) = (a, 0)$ y $f(b) = (b, 0)$;

— en el grupo $(C, +)$,

$$f(a) + f(b) = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = (c, 0);$$

— $(c, 0) = f(c)$.

Es decir:

$$\boxed{f(a + b) = f(a) + f(b)}$$

La aplicación $(R, +) \xrightarrow{f} (C, +)$ es un homomorfismo porque cumple la propiedad recuadrada.

Ejercicio 1

Compruébese si es homomorfismo la aplicación $(R, \times) \xrightarrow{f} (C, \times)$ *del ejemplo* 1.

Ejercicio 2

Recuérdese que el conjugado del complejo $z=(a+bi)$ *es el complejo* $\bar{z}=(a-bi)$. *Luego, analícese si la aplicación* $(C, +) \xrightarrow{\varphi} (C, +)$, *que hace corresponder a cada complejo su conjugado, es o no un homomorfismo.*

Ejercicio 3

Realícese el mismo estudio que en el ejercicio anterior con la aplicación establecida entre las estructuras multiplicativas $(C, \times) \xrightarrow{\varphi} (C, \times)$.

En el ejemplo 1 y ejercicio 1 las dos estructuras son distintas, mientras que en los ejercicios 2 y 3 se trata de la misma.

Ejemplo 2

Sea la función $f : Z \to Q^+$, definida por el criterio $2^x=y$.

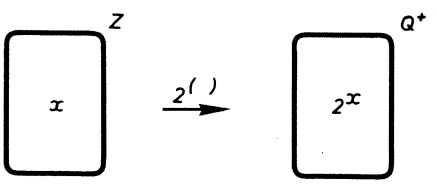


FIG. 2.1.

$$f(4)=2^4=16$$
$$f(2)=2^2=4$$
$$\left.\begin{array}{l} f(4+2)=f(6)=2^6=64 \\ f(4)\cdot f(2)=16\times 4=64 \end{array}\right\} \; f(4+2)=f(4)\cdot f(2).$$

Parece que f es un homomorfismo entre el grupo $(Z, +)$ y el grupo $(Q^+, \times)$. Efectivamente,

$$\boxed{f(a+b)=f(a)\cdot f(b)}$$

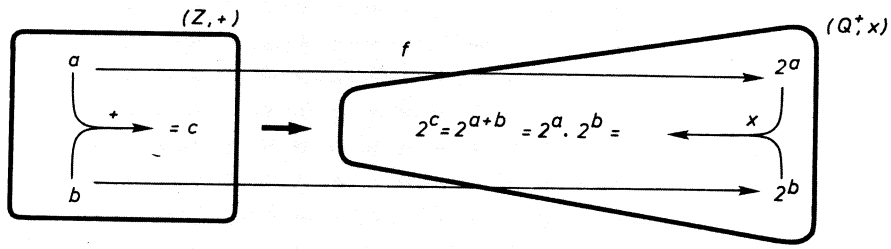


FIG. 2.2.

Ejercicio 4

Compruébese el homomorfismo del ejemplo anterior, usando los antecedentes en Z, −2 y −3.

Sean el conjunto A con la operación $*$ y el conjunto B con la operación $\perp$. Se define:

La aplicación $(A, *) \xrightarrow{f} (B, \perp)$ es homomorfismo $\iff \forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1 * x_2) = f(x_1) \perp f(x_2)$

que se lee:

> «La aplicación f entre dos conjuntos estructurados A y B es homomorfismo si, y sólo si, la imagen del compuesto de dos cualesquiera elementos de A, según su operación, es igual a la composición de las imágenes, según la operación de B.»

Pueden ayudar a fijar este importante establecimiento los dos esquemas que se dibujan en las figuras 2.3 y 2.4.

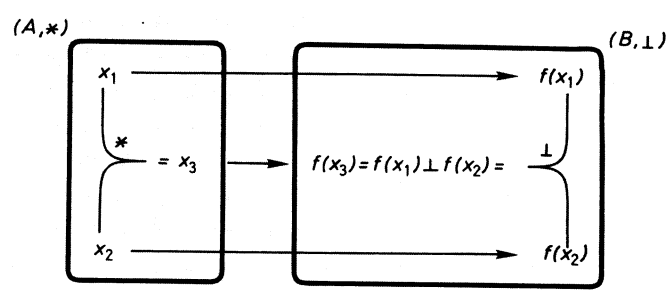


FIG. 2.3.

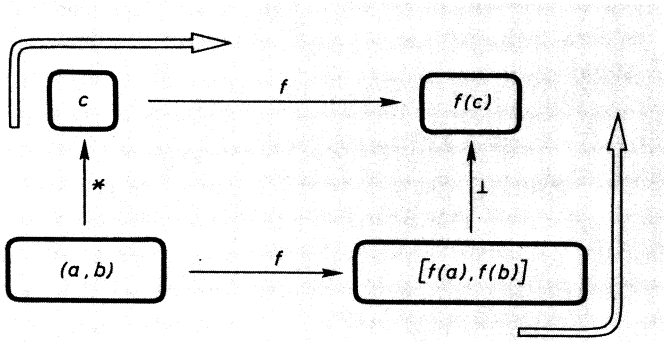


FIG. 2.4.

Las flechas gruesas de la figura 2.4 quieren indicar que se alcanza el mismo resultado, bien operando y luego haciendo la imagen del resultado (camino superior), bien estableciendo las imágenes del par de operandos y luego realizando con ellas la operación.

Ejercicio 5

Sea la función lineal de R en R, $y=5x$. Analícese si es homomorfismo entre los grupos $(R, +)$ y $(R, +)$.

Ejercicio 6

Descúbrase sobre los esquemas si se trata de homomorfismos y establézcanse las aplicaciones, en los que proceda.

Dadas las aplicaciones de $(Z, +)$ en $(Z, +)$; de $(R, +)$ en $(R, +)$, y de $(Z, +)$ en $(Q, \times)$, sugeridas por los esquemas, analícese si se trata de homomorfismos.

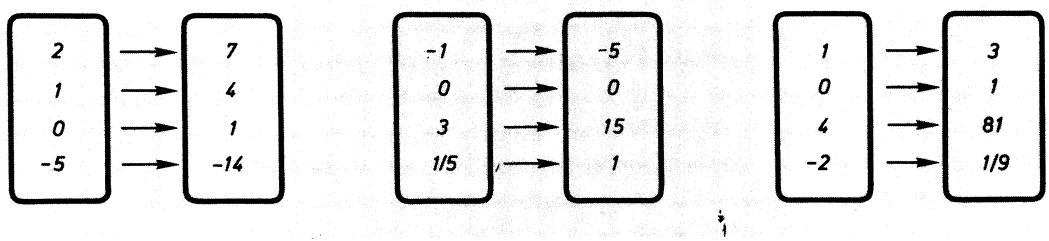


FIG. 2.5.

Es muy fácil demostrar que en todo homomorfismo la imagen del neutro de la estructura original ha de ser el neutro de la segunda.

En el caso de que la aplicación sea biyectiva, el homomorfismo recibe el nombre de *isomorfismo.*

2. FUNCIONES EXPONENCIALES DE BASE 2 Y DE BASE 10

2.1. Establecimiento

Construyamos una función de las siguientes características:

— Conjunto original o dominio: el de los reales, R;
— conjunto imagen o recorrido: el de los reales positivos, R^+;
— criterio: a cada $x \in R$, le hace corresponder $y = 2^x \in R^+$.

$$R \xrightarrow{f_2} R^+$$
$$x \longrightarrow f_2(x) = 2^x$$

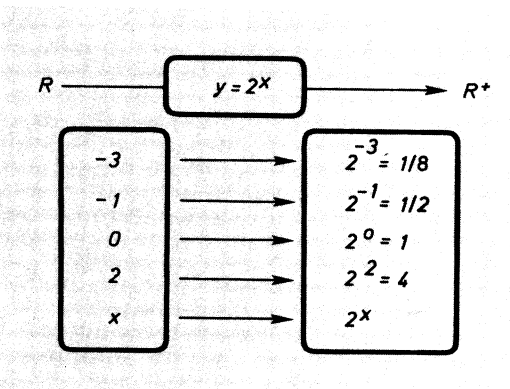


FIG. 2.6.

La función exponencial así establecida es la *función exponencial de base* 2.

No ofrece dificultad comprender y calcular 2^x, si x es racional. En el caso de ser x irracional, por ejemplo, $\sqrt{3}$, entonces $2^{\sqrt{3}}$ es el límite de una sucesión monótona, creciente y acotada superiormente:

$$2^{a_1},\ 2^{a_2},\ \ldots,\ 2^{a_n},\ \ldots$$

en donde a_1, a_2, a_n, ... es una sucesión creciente de límite $\sqrt{3}$.

La elección de esta sucesión se demuestra que no afecta al límite de la sucesión de imágenes.

Ejercicio 7

Determínense:

a) *las imágenes, según* f_3, *de los reales* 0, 1/2, $-1/2$, 1, 2;

b) *los originales cuyas imágenes, según* f_3, *son:* 9, 1/3, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$, 1.

Ejercicio 8

Establézcase, como se ha hecho con f_2, *la función exponencial de base* 10. *Luego, calcúlense:*

$$f_{10}(1/2);\quad f_{10}(2);\quad f_{10}(-2);\quad f_{10}^{-1}(\sqrt{10});\quad f_{10}^{-1}(100);\quad f_{10}^{-1}(0{,}01).$$

2.2. Análisis de la función exponencial $y=2^x$

La función $y=2^x$, definida de R en R^+, es:

a) **Uniforme** (=aplicación)

$$\forall\, x \in R, \qquad \exists^* y \in R^+ / y = 2^x.$$

b) **Continua** en R

$$\forall\, p \in R, \quad \lim_{x \to p} 2^x = 2^p.$$

c) Estrictamente **creciente**

$$x_1 < x_2 \implies 2^{x_1} < 2^{x_2}.$$

d) **Unívoca** (=inyectiva),
por ser creciente en sentido estricto,

$$2^{x_1} = 2^{x_2} \iff x_1 = x_2;$$

es decir, cada $y \in R^+$ es imagen única de un $x \in R$.

e) **Exhaustiva**

$$\forall\, y \in R^+, \quad \exists\, x \in R / y = 2^x.$$

f) **Biunívoca** (=biyectiva),
puesto que es simultáneamente inyectiva y exhaustiva.

Ejercicio 9

Analícense esos seis puntos en la función exponencial de base 10.

El análisis de la función exponencial $y=2^x$ no se ha acabado con esos seis puntos; falta otro importante. En efecto, considérese ahora la función exponencial de base 2, establecida entre su dominio y su recorrido estructurados:

— dominio: el grupo aditivo $(R, +)$;
— recorrido: el grupo multiplicativo $(R^+, \times)$:

$$(R, +) \xrightarrow{f_2} (R^+, \times)$$

Comprobemos si cumple la condición de homomorfismo para un par cualquiera de reales.

Ejemplo 3

Sean los reales 1/2 y 2, pertenecientes al dominio $(R, +)$.

$$f_2(1/2) \cdot f_2(2) = 2^{1/2} \times 2^2 = 2^{1/2+2} = f_2(1/2 + 2).$$

Ha resultado que la imagen de la suma es igual al producto de las imágenes.

El comportamiento del ejemplo es general, y se puede escribir, terminando con el análisis de la función, este séptimo punto:

g) $\forall\, x_1, x_2 \in R,$

$$f_2(x_1) \cdot f_2(x_2) = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = f_2(x_1 + x_2)$$

Visto que se trata de un homomorfismo, como la función es biyectiva, el análisis establecido permite escribir:

La función exponencial de base 2 es un isomorfismo continuo y creciente entre $(R, +)$ y $(R^+, \times)$.

Ejercicio 10

Consúltese el párrafo inmediatamente posterior al ejercicio 6 *y, luego, dígase cuál es la imagen, según* $y = 2^x$, *del real cero.*

Ejercicio 11

Usando la función exponencial de base 10, *establézcase la expresión que la justifica como isomorfismo entre* $(R, +)$ *y* $(R^+, \times)$.

2.3. Gráfica cartesiana de $y = 2^x$

Observaciones

Los siete puntos del análisis de la función se traducen en estas siete observaciones sobre su gráfica:

a) Trazando cualquier recta paralela al eje OY, sólo corta en un punto (función uniforme);

b) no presenta ningún «salto» en todo su recorrido (función continua);

c) a mayor abscisa, mayor ordenada y recíprocamente

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

(función creciente)

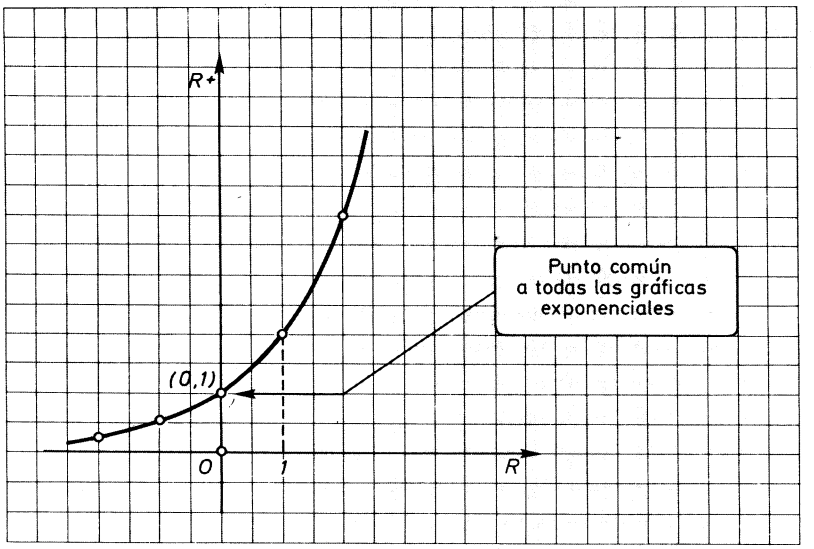


FIG. 2.7.

d) al trazar cualquier recta paralela al eje OX, dentro de su recorrido, ésta corta sólo en un punto (función unívoca);

e) cualquier recta paralela al eje OX, dentro de su recorrido, corta en un punto (función exhaustiva en R^+);

f) es biunívoca, según *d)* y *e)*;

g) pasa por el punto (0, 1), pues, al ser isomorfismo entre $(R, +)$ y $(R^+, \times)$, la imagen del neutro aditivo 0 es el neutro multiplicativo 1.

Ejercicio 12

Debido al «rápido crecimiento» de las funciones exponenciales, al dibujar sus gráficas aparece un inconveniente, y es que las ordenadas en seguida se hacen muy altas y «se salen del papel». Para evitar esa dificultad, se toman distintas escalas en el eje de abscisas y en el de ordenadas.

Tómese un papel milimetrado de 60×70 *mm, y sobre él, háganse las gráficas cartesianas de las funciones exponenciales de bases* 2, 3 *y* 10, *tomando como unidad sobre el eje de abscisas* 10 *mm y sobre el eje de ordenadas* 2 *mm.*

3. LA FUNCION EXPONENCIAL DE BASE *a*

3.1. Establecimiento. Bases

Estudiados los casos particulares de las funciones exponenciales de bases 2 y 10, se procede ahora al establecimiento de la función exponencial de un modo general, siendo la base a cualquier real positivo, excepto la unidad; o sea:

$$a \in R^+ - \{1\},$$

que también puede expresarse

$$a \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Adviértase que los paréntesis indican intervalos abiertos y, por tanto, no han de considerarse los extremos.

Ejercicio 13

Analícese qué sucedería si se considerara para base de una función exponencial la unidad.

Así, pues, la base a puede ser positiva menor que 1 o positiva mayor que la unidad.

Si se trata de una exponencial de base $a>1$, la función es creciente; si la base considerada es $a<1$, entonces la función exponencial a que da lugar es decreciente.

$$y = a^x \begin{cases} a \in (0, 1) \implies \text{función decreciente} \\ a \in (1, +\infty) \implies \text{función creciente} \end{cases}$$

Ejemplo 4

En la figura 2.8 se hacen las representaciones cartesianas de las funciones exponenciales $y=(1/2)^x$; $y=2^x$; $y=(1/4)^x$; $y=4^x$.

Ejercicio 14

Si $a \cdot b = 1$, ¿cómo son las gráficas de las funciones de a^x y b^x?

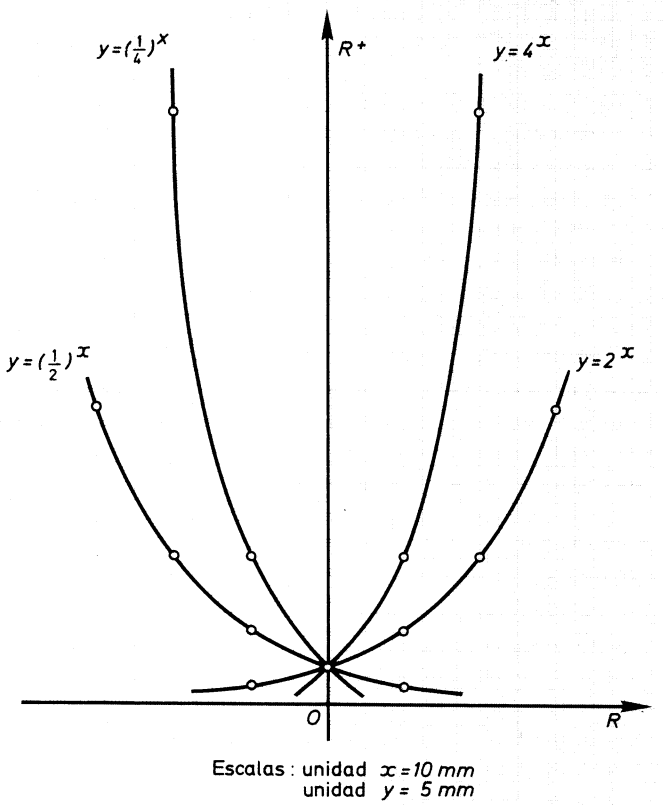


FIG. 2.8.

Cuando dos funciones exponenciales tienen bases inversas, como por ejemplo 2 y 1/2, sus gráficas cartesianas son simétricas respecto del eje de ordenadas, como puede observarse en la figura 2.8.

Al igual que se hizo en el apartado 2.2, para la función exponencial particular $y=2^x$ el análisis de la general $y=a^x$ produce los siguientes resultados:

3.2. Análisis de la función exponencial $y=a^x$

La función exponencial $y=a^x$ es:

a) **Uniforme**

$$\forall\, x \in R, \quad \exists^* y \in R^+ / y=a^x.$$

b) **Continua** en R

$$\forall\, p \in R, \quad \lim_{x \to p} a^x = a^p.$$

c) Crecimiento: dos posibilidades

$\boxed{a>1}$ es estrictamente **creciente**

$$x_1<x_2 \Longrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$$

$\boxed{a<1}$ es estrictamente **decreciente**

$$x_1<x_2 \Longrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$$

} monótona en R

d) **Unívoca** (=inyectiva)

$$a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2.$$

e) **Exhaustiva**

$$\forall\, y\in R^+,\quad \exists\, x\in R/y=a^x.$$

f) **Biunívoca** (=biyectiva),
puesto que es simultáneamente inyectiva y exhaustiva.

g) Cumple la condición de **homomorfismo**

$$\forall\, x_1, x_2\in R \qquad f_a(x_1)\cdot f_a(x_2)=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=f_a(x_1+x_2)$$

Tras los siete puntos establecidos, se tiene:

La función exponencial de base $a\in R^+-\{1\}$ es un isomorfismo continuo entre $(R, +)$ y $(R^+, \times)$. Si $a>1$, es creciente; si $a<1$, es decreciente.

4. GENERACION DE SUCESIONES CON LIMITE *e*

Se ha visto el número e como límite de

$$\lim_{a_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

cuando a_n es racional.

Cabe preguntarse por el límite —si existe— en el caso de ser a_n una sucesión de números reales que tienda a infinito.

La contestación es que sigue siendo el número e, que es lo que a continuación se pretende justificar:

$$a_m\in R^+,\quad \exists\, n\in N/n\leqslant a_m<n+1. \qquad [1]$$

Invirtiendo los miembros de esa desigualdad, se obtiene:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{a_m} > \frac{1}{n+1}$$

y sumando la unidad a cada miembro

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{a_m} > 1+\frac{1}{n+1}.$$

Los tres miembros de esta nueva desigualdad son, ciertamente, mayores que la unidad, lo cual supone que sus potencias de igual exponente mantienen el mismo orden; con mayor razón, si los exponentes también guardan la misma ordenación. Así que

$$\underset{(a)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \geqslant \underset{(x)}{\left(1+\frac{1}{a_m}\right)^{a_m}} > \underset{(b)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}.$$

Ahora bien, la sucesión (a) tiene por límite el número e. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Análogamente le sucede a la sucesión (b):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

Entonces, sucede que

$$e \geqslant \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_m}\right)^{a_m} \geqslant e.$$

Por hipótesis, si $m \to \infty$, entonces $a_m \to \infty$, y se puede escribir:

$$e \geqslant \lim_{a_m\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_m}\right)^{a_m} \geqslant e.$$

El criterio conocido con el nombre de «regla del sandwich», permite finalmente escribir:

$$\boxed{\lim_{a_m\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_m}\right)^{a_m} = e, \quad \forall\, a_m \in R^+}\ *$$

* Aunque se ha preferido no formalizarlo, una extensión análoga al razonamiento precedente concluiría el establecimiento de este límite funcional

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.1

1. $a, b \in R$; $f(a) = (a, 0)$; $f(b) = (b, 0)$;
$f(a) \cdot f(b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0) = f(a \cdot b)$

$(R, \times) \xrightarrow{f} (C, \times)$ es un homomorfismo.

2. $\varphi(a + bi) + \varphi(c + di) = (a - bi) + (c - di) = (a + c - (b + d)i) =$
$= \varphi[(a + bi) + (c + di)]$

$(C, +) \xrightarrow{\varphi} (C, +)$ es un homomorfismo.

3. $\varphi(a + bi) \cdot \varphi(c + di) = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd - (ad + bc)i) =$
$= \varphi[(a + bi) \cdot (c + di)]$

$(C, \times) \xrightarrow{\varphi} (C, \times)$ es un homomorfismo.

4. $y = 2^x$; $f(-2) = 2^{-2} = 1/4$; $f(-3) = 2^{-3} = 1/8$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2-3) = f(-5) = 2^{-5} = 1/32 \\ f(-2) \cdot f(-3) = 1/4 \times 1/8 = 1/32 \end{array}\right\} \; f(-2-3) = f(-2) \cdot f(-3).$$

5. $y = 5x$ es un homomorfismo entre $(R, +)$ y $(R, +)$. En efecto:

$$f(a) = 5a \;;\; f(b) = 5b \;;\; f(a) + f(b) = 5a + 5b = 5(a + b) = f(a + b).$$

6. La primera no es homomorfismo; la segunda representa el homomorfismo

$$(R, +) \xrightarrow{y=5x} (R, +);$$

la tercera representa el homomorfismo

$$(Z, +) \xrightarrow{y=3^x} (Q, \times).$$

7. *a)* $f_3(0) = 1$; $f_3(1/2) = \sqrt{3}$; $f_3(-1/2) = \sqrt{3}/3$;
$f_3(-1) = 1/3$; $f_3(2) = 9$;

b) $f_3^{-1}(9) = 2$; $f_3^{-1}(1/3) = -1$; $f_3^{-1}(\sqrt{3}/3) = -1/2$;
$f_3^{-1}(\sqrt{3}) = 1/2$; $f_3^{-1}(1) = 0$.

8. $R \xrightarrow{10} R^+$

$x \longrightarrow f_{10}(x) = 10^x$

$f_{10}(1/2) = \sqrt{10}$; $f_{10}(2) = 100$; $f_{10}(-2) = 0{,}01$;

$f_{10}^{-1}(\sqrt{10}) = 1/2$; $f_{10}^{-1}(100) = 2$; $f_{10}^{-1}(0{,}01) = -2$.

9. Basta seguir, paso a paso, la teoría, aplicada a $y = 10^x$.

10. $f_2(0) = 1$.

11. *g)* $x_1, x_2 \in R$,

$$f_{10}(x_1) \cdot f_{10}(x_2) = 10^{x_1} \cdot 10^{x_2} = 10^{x_1 + x_2} = f_{10}(x_1 + x_2).$$

12.

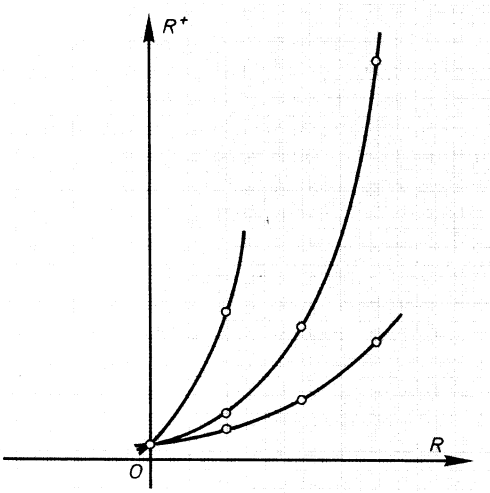


FIG. 2.9.

13. $y = 1^x$ daría lugar a la función constante $y = 1$.

14. Las gráficas son simétricas respecto del eje de ordenadas.

2.2

Función logarítmica

1. LA FUNCION INVERSA DE LA EXPONENCIAL $y=a^x$

La función inversa de la exponencial se llama *función logarítmica,* y la de base a se suele expresar por el simbolismo L_a.

Como corresponde a funciones biunívocas inversas, el dominio de la una es el recorrido de la otra, y viceversa. Por ello, para obtener los pares de la función logarítmica, basta cambiar de orden las proyecciones de los pares de la exponencial.

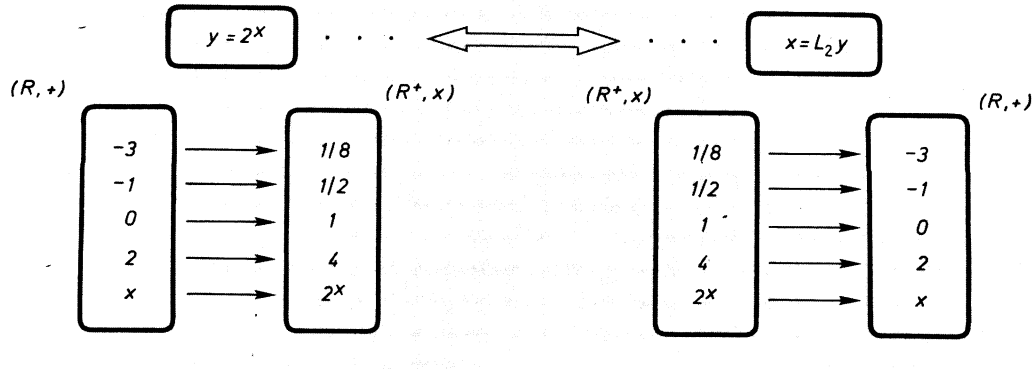


FIG. 2.10.

Para resaltar su condición de inversas, en el ejemplo precedente se ha descrito la función logarítmica así:

$$x = L_2 y;$$

pero lo común, al escribir una función, es usar la letra y para representar las imágenes del recorrido, mientras que la x simboliza los elementos originales del dominio. Por ello, una vez resaltada la naturaleza de inversas de ambas funciones, escribiremos la función logarítmica como es usual escribir todas las demás; así:

$$y = L_2 x.$$

Ejemplo 4

El par (0,5; 3) pertenece a la función exponencial $y = a^x$. Entonces,

$$3 = a^{1/2} \implies a = 9.$$

Cambiando las proyecciones del par, el par (3; 0,5) ha de pertenecer a la función inversa de la exponencial $y = 9^x$; o sea, a la logarítmica

$$y = L_9 x.$$

En efecto, $0{,}5 = L_9 3$.

Las imágenes dadas por la función logarítmica se llaman *logaritmos*. Así, se dice que «0,5 es el logaritmo en base 9 de 3».

Ejercicio 15

Establézcase la función logarítmica de base 10. *Luego, determínense las imágenes, o sea los logaritmos, de los reales positivos* 100, 0,1 *y* 0,01.

Todas las funciones exponenciales tienen el par (0, 1) y, por tanto, todas sus gráficas cartesianas pasan por el punto (0, 1).

Ejercicio 16

Dígase cuál es el punto común de todas las gráficas logarítmicas y determínense los valores de la base a y del real positivo x en

$$L_a x = 0.$$

Ejercicio 17

Tómese un papel cuadriculado de 11×7 *mm. Tras consultar la figura* 2.7, *dibújese la gráfica de la exponencial* $y = 2^x$ *y, también, la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Luego, trácese la gráfica simétrica de la exponencial, respecto de la bisectriz. Establézcase la función que representa esta última línea.*

Como ayuda para la realización de los ejercicios que siguen, recogemos con otras palabras la definición de logaritmo de un número real positivo.

> El logaritmo en base a de un número x es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número.
>
> $$L_a x = y \iff a^y = x.$$

Claro es que se trata, sencillamente, de hacer uso de que las funciones logarítmica y exponencial son inversas.

Ejemplo 7

a) Calcúlese el logaritmo en base 5 de 625

$$L_5\,625 = y \iff 5^y = 625 \iff 5^y = 5^4 \iff y = 4 \;\; ; \;\; L_5\,625 = 4.$$

b) Hállese el logaritmo decimal (en base 10) de 0,001

$$L_{10}\,0{,}001 = y \iff 10^y = 0{,}001 \iff 10^y = 10^{-3} \iff y = -3 \;\; ; \;\; L_{10}\,0{,}001 = -3.$$

Ejercicio 18

Calcúlense:

$$L_2(32) \;\; ; \;\; L_2(16) \;\; ; \;\; L_3(81) \;\; ; \;\; L_3(1/27) \;\; ; \;\; L_5(1/5) \;\; ; \;\; L_2(2^{-3}).$$

Ejercicio 19

En el ejemplo 7 han quedado escritas estas dos equivalencias

$$5^y = 5^4 \iff y = 4 \;\; ; \;\; 10^y = 10^{-3} \iff y = -3.$$

¿En qué se basan las dos equivalencias escritas arriba?

2. EL ISOMORFISMO LOGARITMICO

2.1. Establecimiento. Bases

Resumiendo formalmente lo realizado en los ejercicios y ejemplos del número anterior sobre la función inversa de la exponencial, damos la siguiente definición:

Sea una función de las siguientes características:

— *dominio:* el conjunto de los reales positivos, R^+;
— *recorrido:* el conjunto de los reales, R;
— *criterio:* $\forall\, x \in R^+,\ \exists^*\, y \in R / y = L_a x \iff a^y = x \quad (a \in R^+ - \{1\})$.

La función así definida es la función logarítmica de base a.

La base positiva puede ser mayor o menor que la unidad, dando lugar al crecimiento funcional que se indica:

$$y = L_a x \begin{cases} a < 1 \implies \text{función decreciente} \\ a > 1 \implies \text{función creciente} \end{cases}$$

Ejemplo 5

He aquí las representaciones cartesianas de las funciones logarítmicas

$$y = L_{1/2}(x)\ ;\ y = L_2(x)\ ;\ y = L_{1/4}(x)\ ;\ y = L_4(x):$$

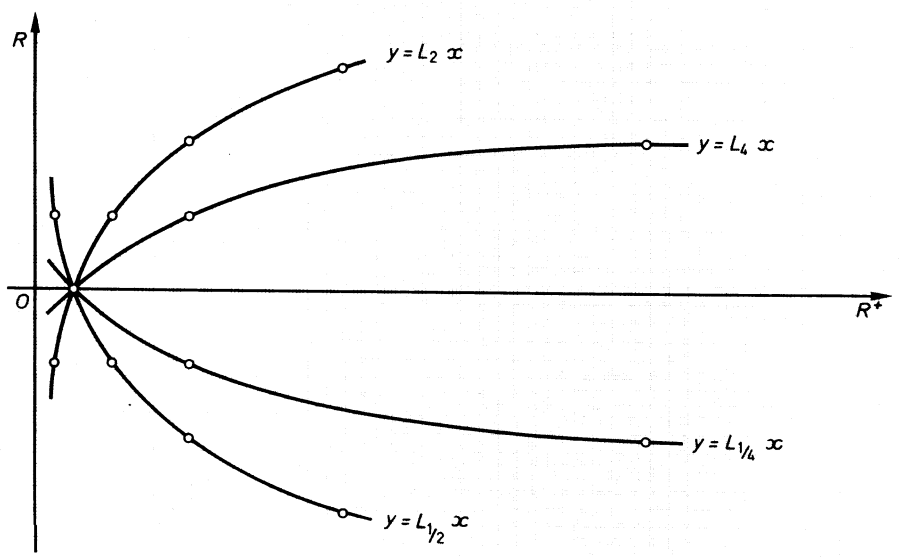


FIG. 2.11. Escalas: unidad $y = 10$ mm
unidad $x = 5$ mm

Ejercicio 20

Tómese un papel milimetrado de 70×60 *mm y, sobre él, dibújense las gráficas cartesianas de las funciones logarítmicas de base* 2, 3 *y* 10, *tomando como unidad sobre el eje de las abscisas* 2 *mm, y sobre el eje de ordenadas* 10 *mm.*

Cuando dos funciones logarítmicas tienen bases inversas, como por ejemplo, 4 y 1/4, sus gráficas cartesianas son simétricas respecto del eje de abscisas, como puede observarse en la figura 2.11.

Ejercicio 21

Si $a \cdot b = 1$, *¿cómo son las gráficas de las funciones* $L_a x$ *y* $L_b x$*?*

2.2. Análisis de la función logarítmica $y = L_a x$

La función logarítmica $y = L_a x$ es:

a) **Uniforme** (=aplicación)

$$\forall\, x \in R^+, \quad \exists^*\, y \in R / y = L_a x.$$

b) **Continua** en R^+

$$\forall\, p \in R^+, \quad \lim_{x \to p} L_a x = L_a p.$$

c) Crecimiento: dos posibilidades

$\boxed{a > 1}$ es estrictamente **creciente**

$$x_1 < x_2 \implies L_a x_1 < L_a x_2$$

$\boxed{a < 1}$ es estrictamente **decreciente**

$$x_1 < x_2 \implies L_a x_1 > L_a x_2$$

} monótona en R^+

d) **Unívoca** (=inyectiva)

$$L_a x_1 = L_a x_2 \iff x_1 = x_2.$$

e) **Exhaustiva**

$$\forall\, y \in R, \quad \exists\, x \in R^+ / y = L_a x.$$

f) **Biunívoca** (=biyectiva),
puesto que es simultáneamente inyectiva y exhaustiva.

g) Cumple la condición de **homomorfismo**

$$x_1, x_2 \in R^+, \quad L_a x_1 + L_a x_2 = L_a (x_1 \cdot x_2).$$

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = L_a x_1 \iff a^{y_1} = x_1 \\ y_2 = L_a x_2 \iff a^{y_2} = x_2 \end{array}\right\} \times$$

$$a^{y_1} \cdot a^{y_2} = x_1 \cdot x_2$$

$$a^{y_1+y_2} = x_1 \cdot x_2 \iff y_1 + y_2 = L_a(x_1 \cdot x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$L_a x_1 + L_a x_2 = L_a(x_1 \cdot x_2).$$

Tras los siete puntos registrados, se establece:

> La función logarítmica de base $a \in R^+ - \{1\}$ es un isomorfismo continuo entre $(R^+, \times)$ y $(R, +)$. Si $a > 1$, es creciente; si $a < 1$, es decreciente.

Ejemplo 9

¿Entre qué dos naturales se encuentra el $L_3 42$?

En el conjunto original, R^+, sucede que

$$3^3 < 42 < 3^4.$$

Como $y = L_3 x$ es función continua creciente, esa desigualdad de originales implica en el conjunto de imágenes

$$L_3(3^3) < L_3(42) < L_3(3^4) \iff 3 < L_3(42) < 4.$$

Ejercicio 22

Determínense los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre -2 *y* -1.

Ejemplo 10

Acótese entre dos números enteros el $L_{1/5}(10)$.

En el conjunto original, R^+, sucede que

$$(1/5)^{-1} < 10 < (1/5)^{-2}.$$

Como la base es menor que la unidad y, en ese caso, la función $y = L_{1/5}(x)$ es continua decreciente; resulta:

$$L_{1/5}(1/5)^{-1} > L_{1/5}(10) > L_{1/5}(1/5)^{-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 > L_{1/5}(10) > -2.$$

Cuando la base es 10, en lugar de escribir el incómodo L_{10}, se acostumbra a poner la abreviatura *log*, de modo que $\log 2 = 0{,}301030...$ significa que el logaritmo en base diez o *decimal* de 2 es ese número que se indica.

Ejercicio 23

a) *Fíjense dos enteros entre los que se encuentre el* $\log 64$;
b) *acótese en Z el* $L_{1/3}(7)$.

Ejercicio 24

Conocido el $\log 2$ *y sabiendo que aproximadamente el* $\log 3 = 0{,}477121$, *calcúlese* $\log 6$ *usando la propiedad de isomorfismo de la función logarítmica decimal.*

3. PROPIEDADES Y CALCULOS LOGARITMICOS

3.1. Logaritmo de un producto

De la propia definición del isomorfismo logarítmico se desprende que:

> El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores *.
>
> $$L(p \cdot q) = L(p) + L(q)$$

Ejercicio 25

Determínese el $\log 4$, *conociendo el* $\log 2$.

3.2. Logaritmo del inverso de un real positivo. Cologaritmo

Ejemplo 11

El logaritmo decimal de 4 es $\log 4 = 0{,}602060$. ¿Cuál es el $\log \frac{1}{4}$?

$$\log\left(4 \times \frac{1}{4}\right) = \begin{cases} \log 4 + \log \frac{1}{4} \\ \log 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \log 4 + \log \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \log \frac{1}{4} = -\log 4$$

$$\boxed{\log \frac{1}{4} = -0{,}602060}$$

* Siempre que no induzca a error, a partir de ahora no escribiremos la base, a fin de conseguir mayor fluidez de lectura.

El resultado del ejemplo 11 es general. En efecto:

$$L\left(q \times \frac{1}{q}\right) = \begin{cases} L(q) + L(q^{-1}) \\ L(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow L(q) + L(q^{-1}) = 0 \Rightarrow \boxed{L\left(\frac{1}{q}\right) = -L(q)}$$

En el isomorfismo logarítmico, los simétricos de las dos estructuras se corresponden:

$$(R^+, \times) \longleftrightarrow (R, +)$$

números **inversos** $\longleftrightarrow$ logaritmos **opuestos**

Al opuesto del logaritmo de un número se le suele denominar *cologaritmo*. Así:

$$L\left(\frac{1}{q}\right) = -L(q) = \text{cologaritmo } (q).$$

Ejercicio 26

Calcúlense:

$$\log 6 \quad ; \quad \log \frac{1}{6} \quad ; \quad \operatorname{colog} 6 \quad ; \quad \operatorname{colog} \frac{1}{6}.$$

3.3. Logaritmo de un cociente

Un cociente es igual al producto del dividendo por el inverso del divisor, de manera que:

$$L\left(\frac{p}{q}\right) = L(p) - L(q) = L(p) + \text{cologaritmo } (q)$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia del logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

$$L\left(\frac{p}{q}\right) = L(p) - L(q) = L(p) + \operatorname{colog} (q)$$

Ejercicio 27

Conociendo el logaritmo decimal de 3 *y también el de* 2, *calcúlese el* log 1,5.

3.4. Logaritmo de una potencia de exponente entero

a) *Si el exponente* $n \in Z^+$*:*

$$L(p^n) = L(\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{L(p) + L(p) + \ldots + L(p)}_{n \text{ veces}} = nL(p).$$

b) *Si el exponente es cero:*

$$L(p^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(p).$$

c) *Si el exponente en* $-n \in Z^-$*:*

$$L(p^{-n}) = L\left(\frac{1}{p^n}\right) = L(1) - L(p^n) = 0 - nL(p).$$

Como se ve, en cualquier caso, $\forall\, z \in Z$,

$$\boxed{L(p^z) = z \cdot L(p)}$$

Ejercicio 28

Conociendo los logaritmos decimales de 2 *y de* 3, *calcúlese:*

a) $\log \frac{1}{8}$; *b)* $\log \frac{2}{3}$; *c)* $\log \frac{1}{0{,}6}$; *d)* $\log \frac{27}{16}$.

3.5. Logaritmo de una raíz de índice $n \in N$

$$L(\sqrt[n]{p})^n = \begin{cases} n \cdot L(\sqrt[n]{p}) \\ L(p) \end{cases} \Rightarrow n \cdot L(\sqrt[n]{p}) = L(p) \Rightarrow \boxed{L(\sqrt[n]{p}) = \frac{1}{n} \cdot L(p)}$$

Ejercicio 29

Hállense los siguientes logaritmos decimales, conociendo $\log 2$ *y* $\log 3$:

a) $\log \sqrt{2}$; *b)* $\log \sqrt{3}$; *c)* $\log \sqrt[3]{6}$;

d) $\log \sqrt[4]{0{,}6}$; *e)* $\log \sqrt[5]{27/16}$.

3.6. Logaritmo de una potencia de exponente racional

$$L(p^{m/n}) = L(\sqrt[n]{p^m}) = \frac{1}{n} \cdot L(p^m) = \frac{1}{n} \cdot m \cdot L(p)$$

$$\boxed{L(p^{m/n}) = \frac{m}{n} \cdot L(p)}$$

Ejercicio 30

Determínese el $\log \sqrt[3]{0{,}6^2}$.

Con las reglas de cálculo descritas, ya se pueden «tomar logaritmos» en cualquier fórmula o expresión algebraica que incluya productos, divisores, potencias y raíces, como se indica en el

Ejemplo 12

Tómense logaritmos decimales en la expresión

$$C = \frac{a}{b}\sqrt{m \cdot \sqrt[3]{n}}$$

$$\log C = \log\left(\frac{a}{b}\right) + \log\sqrt{m \cdot \sqrt[3]{n}}$$

$$\log C = \log a - \log b + \frac{1}{2}\log(m \cdot \sqrt[3]{n})$$

$$\log C = \log a - \log b + \frac{1}{2}(\log m + \log \sqrt[3]{n})$$

$$\log C = \log a - \log b + \frac{1}{2}\log m + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\log n$$

$$\log C = \log a + \operatorname{colog} b + \frac{1}{2}\log m + \frac{1}{6}\log n.$$

Ejercicio 31

Tómense logaritmos decimales en la expresión

$$A = \sqrt[5]{\frac{a^3 b^5 c^2}{m^2 n}}$$

Ejercicio 32

Solamente utilizando el $\log 2 = 0{,}301030$ *es posible calcular el logaritmo de P. Inténtese.*

$$P = \frac{0{,}0125 \times \sqrt[4]{80^3}}{3{,}2^3 \times 0{,}64^5}$$

Ejemplo 13

Despéjese el tiempo de la fórmula del interés compuesto anual.

$$C = c(1+i)^t \Longrightarrow \frac{C}{c} = (1+i)^t.$$

El único modo de despejar el exponente de esa función exponencial es estableciendo su función inversa logarítmica, lo que no es otra cosa, en términos de cálculo, que «tomar logaritmos».

$$\log C - \log c = t \cdot \log (1+i) \Longrightarrow t = \frac{\log C - \log c}{\log (1+i)}.$$

Ejercicio 33

Conociendo solamente el $\log 2 = 0{,}301030$, *determínese el tiempo que ha de estar impuesto un capital de* 160 000 *pesetas, al* 2,4 *por ciento, para que se transformen en* 2 048 000 *pesetas.*

3.7. Característica y mantisa

Analícese de nuevo el ejemplo 9 y repásense los ejercicios 22 y 23 *a)*. Allí puede observarse cómo se determina el intervalo de extremos enteros consecutivos al que pertenece el logaritmo de un número que no es potencia entera de la base.

Ejercicio 34

Determínese el intervalo de extremos enteros consecutivos al que pertenece $\log 64$.

Establézcase el intervalo de extremos enteros consecutivos en el que se encuentra el log 0,03

$$0{,}01 < 0{,}03 < 0{,}1$$
$$10^{-2} < 0{,}03 < 10^{-1}$$

Siendo creciente la función logarítmica decimal, la desigualdad de esos tres antecedentes implica la de sus imágenes

$$\log 10^{-2} < \log 0{,}03 < \log 10^{-1}$$
$$-2 < \log 0{,}03 < -1$$
$$\log 0{,}03 \in [-2, -1]$$

Se dice, entonces, que la *característica* de log 0,03 es -2, porque

> *Característica* o «parte entera» de un logaritmo es el extremo inferior del intervalo de extremos enteros consecutivos a que pertenece.

Este es el momento de volver al ejercicio 43 del capítulo 1.2. Allí se dijo que al tratar de la característica de un logaritmo, se volvería a encontrar la llamada función «parte entera». En efecto: si a cada logaritmo se le hace corresponder su característica, se obtiene la función

$$R \longrightarrow Z$$
$$\log x \longrightarrow \text{característica de } \log x$$
$$\log x \longrightarrow E\,|\log x|$$

La gráfica de esta función está representada en la solución del ejercicio 43 del capítulo 1.2, en la que —adviértase— en abscisas se representan logaritmos de x, mientras que en ordenadas lo hacen las características.

Ejercicio 35

Determínense las características de

$$a)\ \log 64 \quad ; \quad b)\ L_2 9 \quad ; \quad c)\ \log 0{,}83.$$

Conviene poner a punto una regla más cómoda, rápida y operativa para determinar la característica de un logaritmo, sin necesidad de calcular el intervalo de extremos enteros consecutivos al que pertenece.

Se hace su determinación con logaritmos decimales por ser los de mayor utilización. Se distinguen dos casos:

A) *el número x es mayor que la unidad.*

Un número real, como 17,3, que tiene dos cifras enteras, está comprendido entre las potencias de 10

$$10^1 < 17{,}3 < 10^2.$$

En general, un número real x que tiene k cifras enteras, está comprendido entre

$$10^{k-1} \leqslant x < 10^k$$
$$\log 10^{k-1} \leqslant \log x < \log 10^k$$
$$k-1 \leqslant \log x < k$$

Obsérvese que el logaritmo de un número real positivo mayor que uno, con k cifras enteras, tiene de parte entera o característica $k-1$.

El $\log 17{,}3 = 1, \ldots$, pues son dos sus cifras enteras; $\log 524{,}19 = 2, \ldots$, ya que ese número tiene tres cifras enteras.

> La característica del logaritmo decimal de un número mayor que la unidad es igual al número de cifras enteras que tenga menos uno.

Ejercicio 36

¿Entre qué potencias de 10 *se encuentran los números cuyos logaritmos son los que se expresan?*

$$\log A = 0{,}173291 \quad ; \quad \log B = 2{,}234037 \quad ; \quad \log C = 1{,}421324.$$

B) *el número x es un real positivo menor que la unidad.*

Sea el número 0,042

$$10^{-2} < 0{,}042 < 10^{-1}.$$

En general, si un número real positivo menor que la unidad se escribe con k ceros (incluyendo el de las unidades), se puede establecer:

$$10^{-k} \leqslant x < 10^{-(k-1)}$$
$$\log 10^{-k} \leqslant \log x < \log 10^{-(k-1)}$$
$$-k \leqslant \log x < -k+1$$

Entonces, la parte entera o característica de $\log x$ es, en este caso, $-k$. La característica de $\log 0{,}042$ es -2, que se suele escribir $\bar{2}$; el $\log 0{,}34$ tiene de parte entera o característica -1 o también $\bar{1}$.

> La característica del logaritmo decimal de un real positivo menor que la unidad es el entero negativo cuyo valor absoluto coincide con el número de ceros de su expresión decimal (incluido el de las unidades).

Ejercicio 37

¿Entre qué potencias de 10 *se encuentran los números cuyos logaritmos tienen la características que se escriben?*

$$\log A = \bar{1}, \ldots ; \qquad \log B = \bar{2}, \ldots ; \qquad \log C = 0, \ldots$$

En las tablas logarítmicas se encuentra $\log 12{,}45 = 1{,}095169$.
La característica de ese logaritmo es 1; pues bien, se denomina

> *Mantisa* de un logaritmo a la diferencia entre el logaritmo y su característica.

De modo que la mantisa del $\log 12{,}45$ es aproximadamente

$$\text{mantisa} = \log 12{,}45 - \text{característica} \simeq 1{,}095169 - 1 = 0{,}095169.$$

Ejercicio 38

Díganse cuáles son las características y mantisas de los siguientes logaritmos:

a) $\log A = 2{,}172312$; *b)* $\log B = 0{,}002341$; *c)* $\log C = -2{,}173294$.

3.8. Convenio de escritura para los logaritmos negativos

En el apartado *c)* del ejercicio anterior se enunciaba: $\log C = -2{,}173294$; y en el solucionario se escribe:

$$\text{característica} = \bar{3} \quad ; \quad \text{mantisa} = +0{,}826706.$$

Efectivamente, de acuerdo con la definición de característica, el entero menor más próximo a ese logaritmo es $\bar{3}$; y atendiendo, de igual modo, a la definición de mantisa,

$$\text{mantisa} = \log C - \text{característica} = -2{,}173294 - (\bar{3}) =$$
$$= -2{,}173294 + 3 = +0{,}826706.$$

Siendo consecuentes con esas definiciones, se conviene en escribir los logaritmos negativos como se ha hecho en el ejercicio. Pero adviértase que el signo superior afecta solamente a la característica, y la mantisa siempre es positiva.

Ejemplo 15

Calcúlese esta operación de logaritmos:

$$0{,}349112 + \bar{2}{,}341972 - \bar{1}{,}731224 = 0{,}349112 - 2 + 0{,}341972 + 1 - 0{,}731224 = \\ = -1{,}040140.$$

Poniendo de manifiesto, según el convenio de escritura adoptado, la característica y mantisa del logaritmo-resultado, se escribe:

$$-1{,}040140 = \bar{2}{,}959860.$$

Ejercicio 39

Calcúlese el logaritmo de la expresión

$$A = \sqrt{\frac{3}{64}},$$

indicando su característica y mantisa.

4. INSTRUMENTOS PARA CALCULOS LOGARITMICOS

4.1. Tablas de logaritmos

Los logaritmos decimales o de Briggs son los de más uso. Por ello se han calculado y coleccionado en tablas de diversa extensión: desde las «escolares», que tabulan con cinco o seis cifras las mantisas de los logaritmos de los diez mil primeros naturales, hasta las clásicas de L. SCHRÖN, por ejemplo, que registran las de 108 000 primeros naturales, con siete cifras decimales. Todas ellas se inician con suficientes y claras instrucciones para su manejo, por lo que sobra hacerlo aquí.

Son dos los problemas para los que se usa una tabla de logaritmos:

a) directo: dado un $x \in R^+$, determinar el $\log x$;

b) inverso: conocido $\log x$, hallar el x que le corresponde, que se llama con frecuencia *antilogaritmo.*

Aunque hoy el uso de tablas es cada vez menor, debido a que se dispone de instrumentos mucho más rápidos, como pueden ser las *calculadoras* o las cómodas *reglas de cálculo,* conviene dar alguna indicación sobre el valor aproximativo de la interpolación lineal en el cálculo logarítmico, realizado con tablas.

Se desea calcular el $\log 5496{,}3$ y se dispone de unas tablas que facilitan

$$\log 5496 = 3{,}740047$$
$$\log 5497 = 3{,}740126$$

Siendo la función logarítmica decimal continua creciente, es claro que

$$3{,}740047 < \log 5496{,}3 < 3{,}740126.$$

Se acostumbra a hacer un cálculo por aproximación, de esta manera:

$$\log 5497 - \log 5496 = 0{,}000079.$$

Diferencia de números	*Diferencia de logaritmos*	
1	0,000079	$\Rightarrow x = 0{,}0000237$
0,3	x	

$$\log 5496{,}3 = \log 5496 + 0{,}0000237 \simeq 3{,}7400707.$$

Cáigase en la cuenta de que esta «interpolación» se fundamenta en considerar la función logarítmica como lineal, en el intervalo de interpolación. La aproximación es razonable. La figura 2.12 ilustra lo que se lleva expuesto. (Las escalas son convencionales, a fin de resaltar las diferencias.)

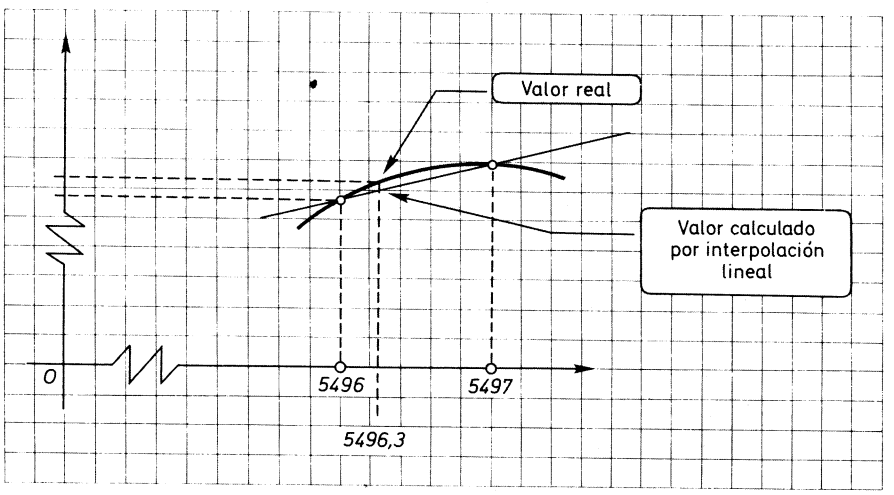


FIG. 2.12.

4.2. Calculadoras

Tampoco procede hacer aquí descripción alguna de estas máquinas ni de su manejo; sólo advertir que las más elementales no hacen cálculos logarítmicos, limitándose a las «operaciones aritméticas».

4.3. La regla de cálculo

La regla de cálculo es un instrumento muy útil para el científico y el técnico. Los resultados que produce, naturalmente, no son tan «exactos» como los que se puedan conseguir con cálculo directo; pero su aproximación suele ser suficiente y la rapidez compensa con mucho a esa mayor «exactitud».

La base matemática de su construcción y manejo no puede ser más simple: es el isomorfismo

$$(R^+, \times) \xrightarrow{\log} (R, +).$$

En la figura 2.13 se reproduce una regla de tipo pequeño.

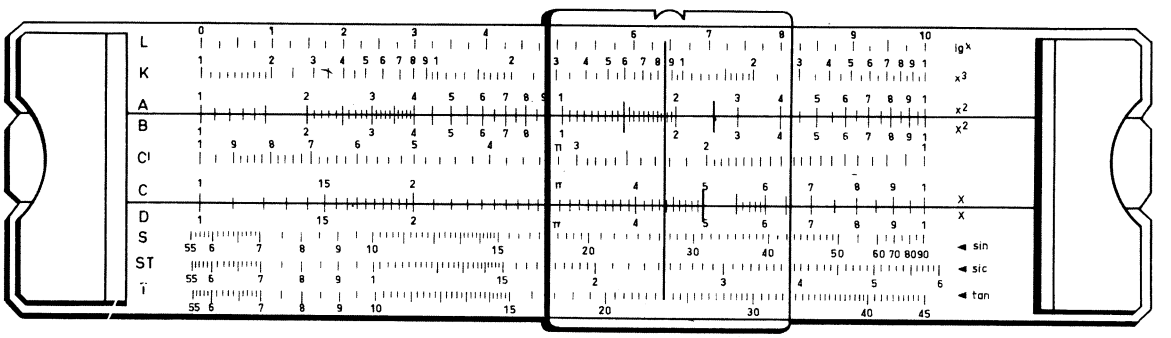


FIG. 2.13.

Ejercicio 40

Construcción de un prototipo de regla de cálculo elemental.

1. *Tómese un «tablex» o chapa de madera y, con una segueta, construyanse las siguientes piezas:*

   — *una pieza-base, rectángulo de* 21×4 *cm;*
   — *dos piezas R, rectángulos de* 21×1 *cm;*
   — *una pieza A, rectángulo de* 22×1 *cm;*
   — *una pieza B, rectángulo de* 22×1 *cm.*

2. *Sobre la pieza-base, longitudinalmente, se pega una de las piezas R, se colocan a continuación las piezas A y B y se pega la otra pieza R. De este modo habrá de quedar exactamente cubierta la pieza-base.*
3. *Se toma un papel milimetrado de* 20×4 *cm y se pega sobre las piezas pegadas o colocadas en el punto 2. Cuídese de que las divisiones longitudinales del papel milimetrado coincidan con las fronteras de las piezas.*

4. *Márquense, como se indica en la figura* 2.14, *las escalas R.*

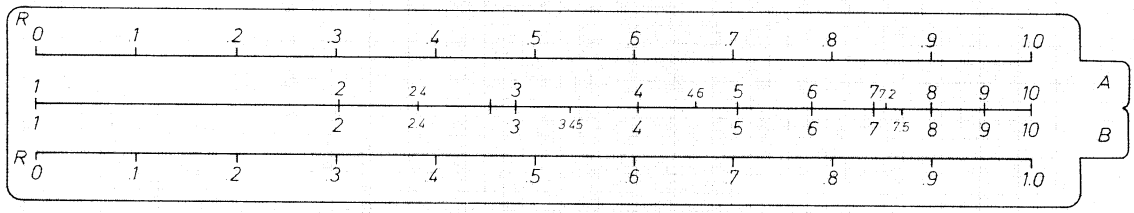


FIG. 2.14.

5. *Sobre las piezas móviles A y B se construyen las escalas A y B que se indican. Se trata de los logaritmos decimales correspondientes a los números de la escala R. En la figura se han dispuesto algunos; conviene completarla, usando las tablas de logaritmos.*
6. *Con una hoja de afeitar o instrumento similar se corta el papel milimetrado, siguiendo las fronteras R-A, A-B y B-R.*
7. *Con ello se ha construido una rudimentaria regla de cálculo elemental. Veamos cómo funciona:*

Ejemplo 16

a) *Productos menores que* 10: $2{,}4 \times 3 = 7{,}2$.

1. Se corre la regla *A* hasta hacer coincidir el 1 de *B* con el 2,4 de *A*;
2. se busca el multiplicador 3 en la *B* y, encima de él, se lee el resultado 72 en la regla *A*.

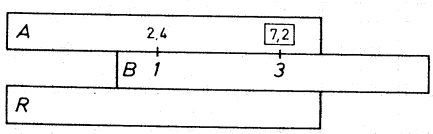


FIG. 2.15.

Obsérvese que lo se ha hecho para multiplicar ha sido sumar logaritmos y después ver de qué número es logaritmo el resultado.

b) *Productos mayores que* 10: $7{,}5 \times 4{,}6 = 34{,}5$.

Como la regla «se queda corta», se realiza del siguiente modo:

1. Se corre la regla *A* hasta hacer coincidir el 10 con el multiplicando 7,5 en la regla *B*;
2. se busca el multiplicador 4,6 en la *A* y, debajo de él, se lee en *B* 3,45, que no es el resultado. Ha de multiplicarse por 10 para obtener el resultado correcto: 34,5.

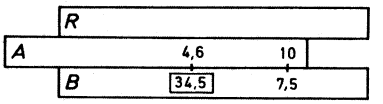


FIG. 2.16.

Eso es debido a que cuando se ha enfrentado el multiplicando 7,5 al 10 de la escala *A*, en realidad lo que se ha hecho es dividir por 10; por eso, la multiplicación que se ha efectuado no ha sido $7{,}5 \times 4{,}6$, sino $0{,}75 \times 4{,}6$.

c) *División:* $7{,}2 : 2{,}4 = 3$.

1. Se hace coincidir el dividendo 72 en *A* con el divisor 24 en *B*;
2. sobre el 1 de *B* se lee el resultado 3.

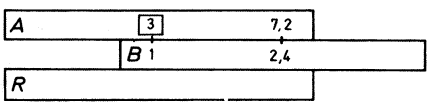


FIG. 2.17.

Cáigase en la cuenta de que lo que se ha hecho ha sido restar logaritmos.

Se hubiera hecho la misma manipulación para hacer la operación 720:0,24 que la que se ha hecho en *c)*; y es que la regla «no da los decimales»; han de suplirse sobre el resultado en un elemental cálculo mental.

Con la regla de cálculo se puede elevar al cuadrado, al cubo, extraer raíces, calcular intereses, aproximar funciones y muchas otras cosas que la hicieron un inapreciable instrumento de cálculo. Hoy las extraordinarias calculadoras conseguidas suplen frecuentemente con ventaja a este sencillo y poderoso instrumento de cálculo.

4.4. Papeles logarítmicos y semilogarítmicos

Así como se fabrica papel milimetrado cuya retícula es milimétrica en sus dos dimensiones, también existe en el comercio el llamado *papel logarítmico.* Su retícula está construida con los logaritmos de los reales positivos, pero no en base 10, sino en base e; los logaritmos en esta base se llaman *logaritmos neperianos,* que si bien no son cómodos para el cálculo, resultan esenciales en cantidad de desarrollos matemáticos.

Ejemplo 17

En cursos superiores, tal vez llegue a estudiar una ley fisico-química, llamada isoterma empírica de Freundlich-Ostwald, que regula la adsorción de gases en sólidos. Su forma es

$$c = \alpha \cdot p^{\beta}$$

c = concentración;
p = presión;
α y β = constantes específicas del sistema.

Si se toman logaritmos en esa ecuación, resulta:

$$Lc = L\alpha + \beta Lp\,,$$

pues bien: obsérvese que esa última función admite representación lineal si se toman en abscisas valores de Lp y en ordenadas los de Lc. Basta para ello tomar un papel logarítmico, pues él mismo se encarga de «tomar logaritmos». Al experimentador le es suficiente ir poniendo en abscisas y ordenadas los antilogaritmos, o sea, los valores de p y de c (Fig. 2.18).

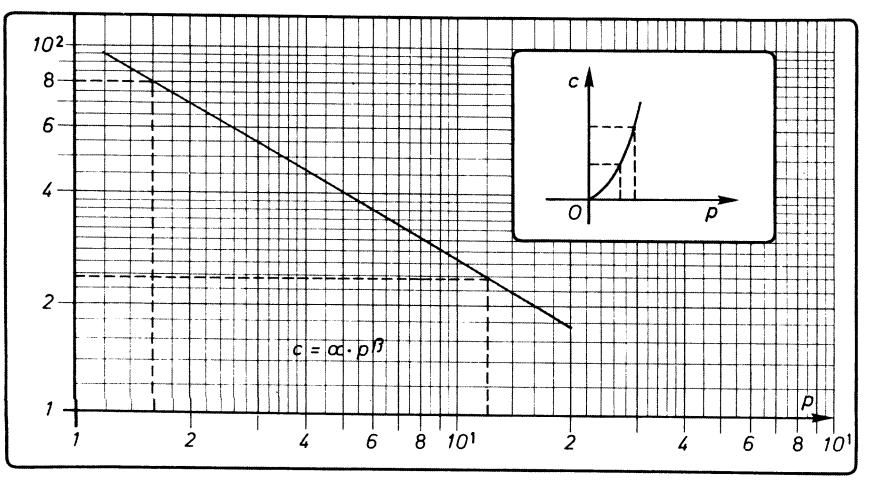


FIG. 2.18.

En el estudio de la radiación y absorción de energías electromagnéticas aparecen unas funciones exponenciales del tipo

$$y = K \cdot e^{ax}$$

o bien, tomando logaritmos en base e,

$$Ly = LK + ax.$$

Esta función puede representarse como una recta, tomando en ordenadas los valores de Ly y, como abscisas, los valores de x.

Existe el llamado *papel semilogarítmico,* que «se encarga de reducir a logaritmos» los antilogaritmos y (Fig. 2.19).

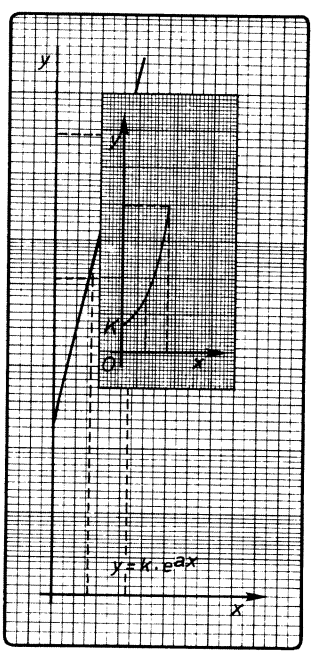


FIG. 2.19.

5. RELACION ENTRE FUNCIONES LOGARITMICAS DE DISTINTA BASE. CAMBIO DE BASE

Considérense las funciones logarítmicas de bases a y b:

$$y_1 = L_a(x) \iff a^{y_1} = x \qquad [1]$$

$$y_2 = L_b(x) \iff b^{y_2} = x \qquad [2]$$

Igualando [1] y [2],

$$a^{y_1} = b^{y_2}.$$

Tomando logaritmos en base b,

$$y_1 \cdot L_b(a) = y_2 \cdot L_b(b).$$

Como $L_b(b) = 1$, resulta:

$$y_1 \cdot L_b(a) = y_2;$$

y despejando,

$$y_1 = \frac{1}{L_b(a)} \cdot y_2 .$$

Sustituyendo los valores de y_1 e y_2,

$$\boxed{L_a(x) = \frac{1}{L_b(a)} \cdot L_b(x).}$$

Siendo $1/L_b(a)$ una constante, resulta que los valores de los logaritmos de los números reales, expresados en distintas bases, son proporcionales.

Ha quedado dicho que los logaritmos cuya base es el número $e = 2{,}71822818...$ se denominan *logaritmos neperianos* o *naturales*. Denotándolos por *ln* *, determínese *ln* 8.

En cualquier tabla se puede ver el logaritmo decimal de e:

$$\log e = 0{,}4342945 \ ;$$

así,

$$\ln 8 = \frac{1}{\log e} \cdot \log 8$$

$$\ln 8 = (1/0{,}4342945) \cdot 3 \log 2 = \frac{0{,}903090}{0{,}4342945} = 2{,}07.$$

Ejercicio 41

Determínese el logaritmo neperiano de 32, *conociendo el* $\log e$ *y el* $\log 2$.

Como los valores que toman las diversas funciones logarítmicas de distintas bases son proporcionales, un modo muy cómodo de dibujar la gráfica de

* Los logaritmos neperianos también se suelen simbolizar con una simple ele mayúscula, *L*.

una de ellas a partir de la de otra es calculando esa constante de proporcionalidad y multiplicando por ella cada una de las ordenadas de la primera. Así se han construido las gráficas de la figura 2.20, a partir de $y = L_8(x)$.

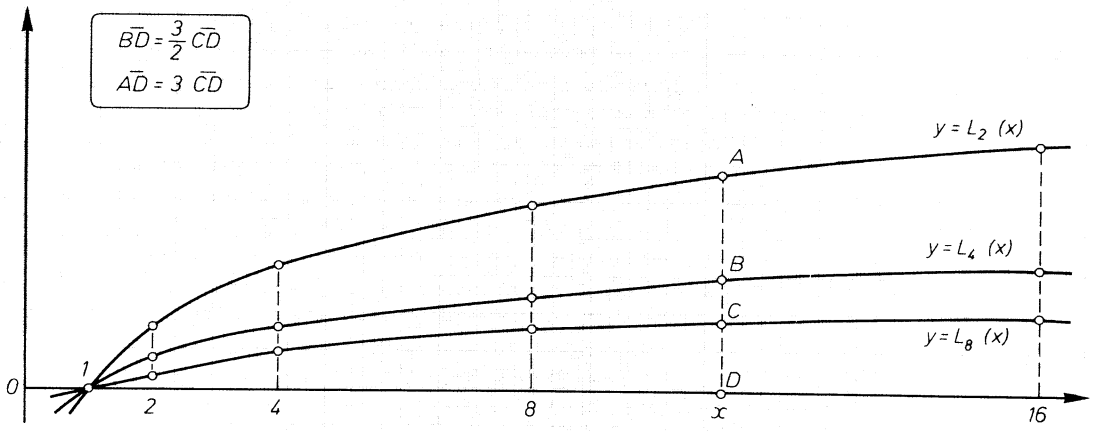


FIG. 2.20.

Ejercicio 42

Tómese un papel milimetrado de 15×8 *cm y, usando en abscisas la escala* 5 : 1 *y en ordenadas la* 10 : 1,

a) *dibújese la gráfica de la función* $y = L_3(x)$;
b) *determínese la constante de proporcionalidad de* $L_9(x) = K \cdot L_3(x)$;
c) *dibújese, usando la k calculada, la gráfica de* $y = L_9(x)$;
d) *determínese la constante de proporcionalidad de* $L_{1/9}(x) = k' \cdot L_3(x)$;
e) *usando la k' hallada, dibújese a partir de* $y = L_3(x)$, *la gráfica de* $y = L_{1/9}(x)$;
f) *¿Cuál es la constante de proporcionalidad k'' en la expresión*

$$L_{1/a}(x) = k'' \cdot L_a(x)?$$

6. ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

6.1. Ecuaciones exponenciales

Son ecuaciones cuya incógnita aparece generalmente en el exponente.

Resuélvase la ecuación

$$10^{2+x}=1.$$

El segundo miembro se puede poner como potencia de 10

$$10^{2+x}=10^{0}.$$

Siendo la función exponencial biyectiva, a igualdad de imágenes corresponde igualdad de antecedentes, de modo que

$$10^{2+x}=10^{0} \iff 2+x=0 \implies x=-2.$$

Como se ve, siempre que sea posible es conveniente conseguir la igualdad de dos potencias de la misma base, porque, entonces, se pueden igualar exponentes.

Ejercicio 43

Resuélvanse las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2-x}=1$; *b)* $2^{-1-x^2}=1/32$; *c)* $3^{2x}=6\,561.$

Determínese un número natural que satisfaga la ecuación exponencial

$$2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=7.$$

Utilizando las reglas de cálculo de potencias de exponentes racionales,

$$2^{x}\cdot 2^{1}+2^{x}+\frac{2^{x}}{2^{1}}=7$$

$$2^{x}\cdot 2^{2}+2\cdot 2^{x}+2^{x}=7\cdot 2^{1}$$

$$4\cdot 2^{x}+2\cdot 2^{x}+2^{x}=14$$

$$7\cdot 2^{x}=14$$

$$2^{x}=2 \iff x=1$$

Ejercicio 44

Resuélvanse estas ecuaciones exponenciales:

a) $2^{2x+2}+2^{x+3}=320$;

b) $3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}=117$;

c) $e^{x}-5e^{-x}+4e^{-3x}=0$;

d) $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 2^4 = 0$;

e) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^x = 2\,047$;

f) $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + \ldots + 3^x = \frac{3\,280}{9}$.

A veces, no se consigue trabajar con la misma base. Entonces es necesario usar la función inversa de la exponencial y hacer un cálculo logarítmico.

Determínese x en la ecuación $2^x = 3$

$$2^x = 3 \iff x \cdot \log 2 = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} \simeq \frac{0{,}477121}{0{,}301030} = 1{,}5$$

Ejercicio 45

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

a) $27 = 2^{3x}$; *b)* $a^{x^2-2x+4} = b$, sabiendo que $\log_a b = 3$.

6.2. Ecuaciones logarítmicas

De modo general conviene atender a dos puntos, a la hora de intentar resolver una ecuación logarítmica:

— la función logarítmica es biyectiva y, por tanto, a igualdad de logaritmos corresponde igualdad de antecedentes (=antilogaritmos),

$$L(M) = L(N) \iff M = N \ ;$$

— a veces interesa reconstruir la operación en la que se han tomado logaritmos; así,

$$\log a + \log b = \log (a \cdot b)$$

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$n \cdot \log a = \log a^n$$

Resuélvase la ecuación $\log 50 + \log x = \log 1\,000$.

$$\log (50 \cdot x) = \log 1\,000 \iff 50x = 1\,000 \implies x = 20.$$

Calcúlese el real positivo que verifica la ecuación

$$2 \log x = 1 + \log \left(x + \frac{11}{10} \right)$$

$$2 \log x - \log \left(x + \frac{11}{10} \right) = 1$$

$$\log x^2 - \log \left(x + \frac{11}{10} \right) = 1$$

$$\log \frac{x^2}{x + 11/10} = 1 \iff 10^1 = \frac{x^2}{x + 11/10}$$

$$10x + 11 = x^2$$

$$x^2 - 10x - 11 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Solución que se rechaza por no pertenecer al dominio de la variable logarítmica.

Ejercicio 46

Resuélvanse las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $3 \log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$;

b) $\log \frac{x}{2} = 2 \log x + \frac{7}{4}$;

c) $\log \frac{10}{x} = 3 - 2 \log x$;

d) $2 \log x - \log (x + 16) = 2$;

e) $3 \log (4 - x) - \log (28 - x^3) = 0$;

f) $\log (3x - 4)^2 + \log (7x - 9)^2 = 2$.

6.3. Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Siendo los logaritmos números reales, todas las reglas para la resolución de sistemas en el cuerpo de los reales son válidas aquí, pudiéndose utilizar los tradicionales métodos de igualación, sustitución o reducción; pero, a veces, es conveniente transformar las ecuaciones del sistema, dándoles el mismo tratamiento que se ha hecho en el anterior número.

Ejemplo 25

Resuélvase el sistema

$$\begin{array}{rl} \text{I} & \log x + \log y = 1 \;/\; \cdot 3 \\ \text{II} & 2\log x - 3\log y = 7 \\ \hline \text{I} & 3\log x + 3\log y = 3 \\ \text{II} & 2\log x - 3\log y = 7 \end{array} \Big\} \; \text{I} + \text{II} = \text{III}$$

$$\text{III} \quad 5\log x = 10 \Longrightarrow \log x = 2 \iff x = 10^2 = 100$$

$$\text{III en I} \quad \log 100 + \log y = 1$$

$$\log y = 1 - 2 = -1 \iff y = 10^{-1} = 0{,}1$$

También podía haberse resuelto ese sistema de este modo:

$$\begin{array}{rl} \text{I} & \log x + \log y = 1 \\ \text{II} & 2\log x - 3\log y = 7 \\ \hline \text{I} & \log (x \cdot y) = 1 \iff x \cdot y = 10^1 \\ \text{II} & \log \dfrac{x^2}{y^3} = 7 \iff \dfrac{x^2/y^3 = 10^7}{x = 10/y} \end{array}$$

$$\frac{100}{y^2 \cdot y^3} = 10^7 \Longrightarrow \frac{100}{y^5} = 10^7 \Longrightarrow y^5 = 10^{-5}$$

$$y = 10^{-1} \quad ; \quad x = 100$$

Ejercicio 47

Determínense las soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\begin{array}{rl} \text{I} & \log x + \log y = 3 \\ \text{II} & x + y = 70 \end{array}$

b) $\begin{array}{rl} \text{I} & x - y = 8 \\ \text{II} & L_2 x = 7 - L_2 y \end{array}$

c) $\begin{array}{rl} \text{I} & \log x^3 + \log y^2 = \log 16 \\ \text{II} & \log x - \log 5 = \log 125 \end{array}$

d) $\begin{array}{rl} \text{I} & \log x + \log y^3 = 5 \\ \text{II} & \log x^2/y = 3 \end{array}$

e) $\begin{array}{rl} \text{I} & \log x - \log y = 1 \\ \text{II} & x + y = 22 \end{array}$

f) $\begin{array}{rl} \text{I} & 2\log x - 2\log y = 1 \\ \text{II} & \log x + \log y = 3 \end{array}$

g) I $\log_y (x+3) = 1/2$
II $\log_x (y-18) = 2$

h) I $\log_y (x-4) = 1/2$
II $\log_x (y+8) = 2$

i) I $\log (x-y) + \log (x+y) = \log 33$
II $e^y / e^{11} = e^{-x}$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.2

15. $y = L_{10}(x)$ o también $y = \log x$; $\log 100 = \log 10^2 = 2$;
$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$; $\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$.

16. Todas las gráficas logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

$$L_a(x) = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad \forall\, a \in R^+ - \{1\}.$$

17.

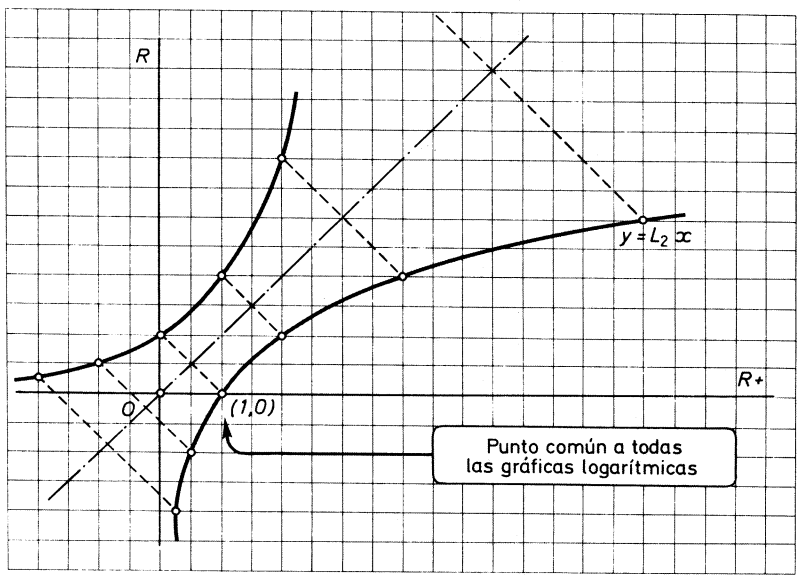


FIG. 2.21.

18. $L_2\, 32 = 5$; $L_2\, 16 = 4$; $L_3\, 81 = 4$; $L_3(1/27) = L_3(3^{-3}) = -3$;
$L_5(1/5) = -1$; $L_2(2^{-3}) = -3$.

19. Ambas igualdades se basan en que la función exponencial es biyectiva y a igualdad de imágenes corresponde igualdad de antecedentes.

20.

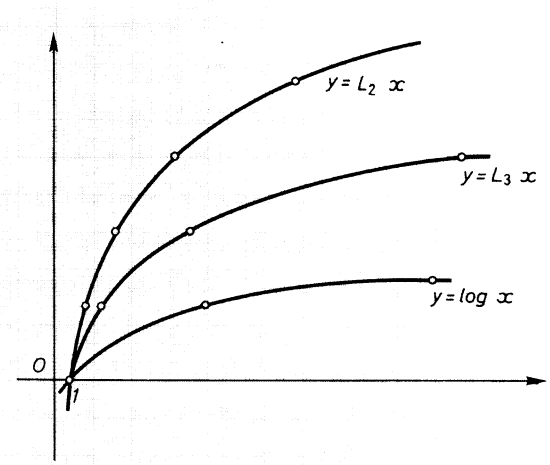


FIG. 2.22.

21. Las gráficas de esas dos funciones logarítmicas son simétricas respecto del eje de abscisas, por tener bases inversas.

22. $-2<\log x<-1 \iff 10^{-2}<10^{x}<10^{-1}$. Los números pedidos están comprendidos entre 0,01 y 0,1.

23. *a)* $10^{1}<64<10^{2} \iff \log 10^{1}<\log 64<\log 10^{2} \iff 1<\log 64<2$;
b) $(1/3)^{-1}<7<(1/3)^{-2} \iff L_{1/3}(1/3)^{-1}>L_{1/3}(7)>L_{1/3}(1/3)^{-2} \iff$

$$\iff -1>L_{1/3}(7)>-2.$$

24. $\log 6=\log (2\cdot 3)=\log 2+\log 3=0{,}301030+0{,}477121=0{,}778151.$

25. $\log 4=\log (2\cdot 2)=\log 2+\log 2=2\times 0{,}301030=0{,}602060.$

26. $\log 6=0{,}778151$; $\log \dfrac{1}{6}=-0{,}778151=\operatorname{colog} 6$;

$\operatorname{colog} \dfrac{1}{6}=\log 6=0{,}778151.$

27. $\log 1{,}5=\log \dfrac{15}{10}=\log \dfrac{3}{2}=\log 3-\log 2=0{,}176091.$

28. *a)* $\log \dfrac{1}{8}=\log 2^{-3}=-3\cdot \log 2=-0{,}903090$;

b) $\log \dfrac{2}{3}=\log 2-\log 3=-0{,}176091$;

c) $\log \frac{1}{0{,}6} = \log 1 - \log \frac{6}{10} = 0 - (\log 6 - \log 10) =$

$= \log 6 + \log 10 = 0{,}221849$;

d) $\log \frac{27}{16} = \log 27 - \log 16 = 3 \cdot \log 3 - 4 \cdot \log 2 = 0{,}227243.$

29. *a)* $\log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2 = 0{,}150515$;

b) $\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log 3 = 0{,}238561$;

c) $\log \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3} \log 6 = 0{,}259383$;

d) $\log \sqrt[4]{0{,}6} = \frac{1}{4} \log 0{,}6 = -0{,}055462$;

e) $\log \sqrt[5]{27/16} = \frac{1}{5} 0{,}227243 = 0{,}045449.$

30. $\log \sqrt[3]{0{,}6^2} = \frac{2}{3} \log 0{,}6 = \frac{2}{3} \times (-0{,}221849) = -0{,}147899.$

31. $\log A = \frac{1}{5} (3 \log a + 5 \log b + 2 \log c + 2 \operatorname{colog} m + \operatorname{colog} n).$

32. $\log P = \log \frac{125}{10\,000} + \frac{3}{4} \log 80 - 3 \log \frac{32}{10} - 5 \log \frac{64}{100} = \ldots =$

$= -\frac{183}{4} \log 2 + \frac{51}{4} = -1{,}022122.$

33. $t = \frac{\log 2048000 - \log 160000}{\log 1{,}024}$;

$2048000 = 2^{11} \times 1000$; $160000 = 2^4 \times 10000$;

$1{,}024 = 1024 \times 10^{-3} = 2^{10} \times 10^{-3}$; $t \simeq 107$ años.

34. Véase ejercicio 23 *a)*.

35. *a)* $\log 64 = 1, \ldots$;

b) $2^3 < 9 < 2^4 \iff 3 < L_2(9) < 4 \iff L_2(9) = 3, \ldots$;

c) $\log 0{,}83 = -1, \ldots$

36. $10^0 < A < 10^1$; $10^2 < B < 10^3$; $10^1 < C < 10^2$.

37. $10^{-1} \leqslant A < 10^0$; $10^{-2} \leqslant B < 10^{-1}$; $10^0 \leqslant C < 10^1$.

38. *a)* $\log A \begin{cases} c = 2 \\ m = +0{,}172312 \end{cases}$ *b)* $\log B \begin{cases} c = 0 \\ m = +0{,}002341 \end{cases}$

c) $\log C \begin{cases} c = \overline{3} \\ m = +0{,}826706 \end{cases}$

39. $\log A = \frac{1}{2}(\log 3 - 6 \log 2) = \frac{1}{2}(0{,}477121 - 1{,}806180) =$

$= -0{,}664529 = \bar{1}{,}335471.$

40. Basta seguir las instrucciones.

41. $\ln 32 = \frac{1}{\log e} \cdot \log 32 = \frac{1}{\log e} \cdot 5 \log 2 = \frac{1{,}505150}{0{,}434295} \simeq 3{,}4.$

42.

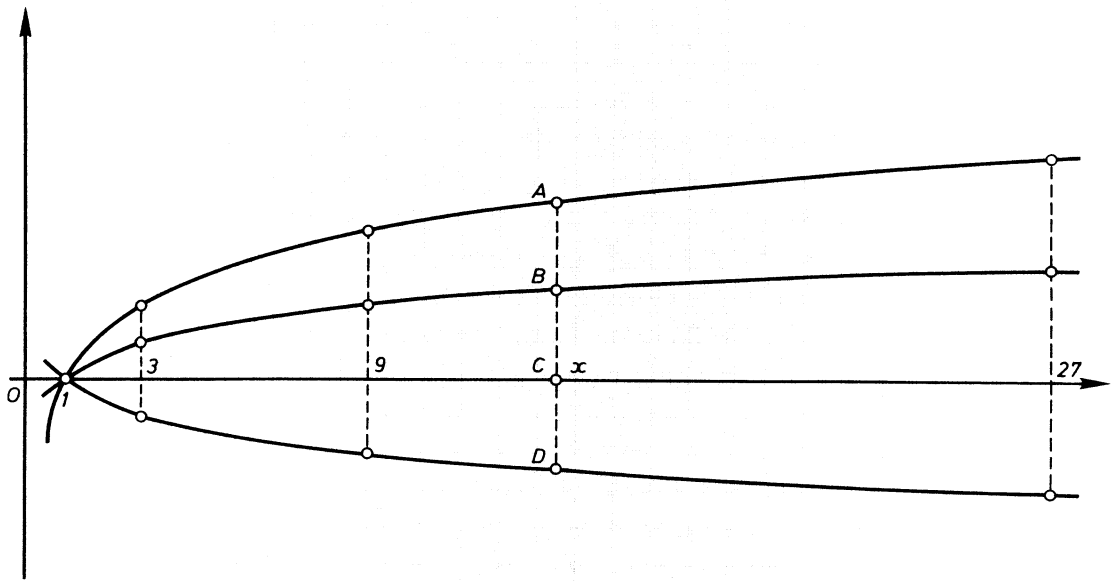


FIG. 2.23.

$$K = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \quad ; \quad K' = \frac{CD}{CA} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad K'' = -1.$$

43. *a)* $x = 2$; *b)* $x = \pm 2$; *c)* $x = 4.$

44. *a)* $4 \cdot (2^x)^2 + 8 \cdot 2^x - 320 = 0$

$2^x = a$

$4a^2 + 8a - 320 = 0 \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_2 = -10 \end{cases}$

$2^x = 8 \iff x = 3$

$2^x = -10$, imposible;

b) $x = 3$;

c) $e^x - \frac{5}{e^x} + \frac{4}{e^{3x}} = 0$

$e^{4x} - 5 \cdot e^{2x} + 4 = 0$

$(e^{2x})^2 - 5 \cdot e^{2x} + 4 = 0$

$e^{2x} = a$

$a^2 - 5a + 4 = 0 \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 1 \end{cases}$

$e^{2x} = 4 \Longrightarrow 2x = L4 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} L4$

$e^{2x} = 1 \Longrightarrow x = 0$;

d) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$;

e) $\frac{2^x \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2047 \Longrightarrow x = 10$;

f) $x = 7$.

45. *a)* $x \simeq 1{,}5$; *b)* $x^2 - 2x + 4 = 3 \Longrightarrow x = 1$.

46. *a)* $x_1 = 4$

$x_2 = -4$, se rechaza por no pertenecer al dominio de la variable logarítmica;

b) $x = \frac{1}{20} \cdot 10^{-3/4}$;

c) $x = 100$.

d) no tiene solución en R^+;

e) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$;

f) $x_1 = 2$, $x_2 = 13/21$.

47. *a)* $x = 50$; $y = 20$;

b) $x = 16$; $y = 8$;

c) $x = 625$; $y = 4/15625$;

d) $x = 100$; $y = 10$;

e) $x = 20$; $y = 2$;

f) $x = 10^{7/4}$; $y = 10^{5/4}$;

g) $x = 3/2$; $y = 81/4$;

h) $x = 3$; $y = 1$;

i) $x = 7$; $y = 4$.

2.3

Funciones circulares

1. GONIOMETRIA

Recibe este nombre la técnica y el conjunto de cálculos de la medida de ángulos. La palabra procede del griego: *gonion* = ángulo, *metron* = medida.

Son varias las unidades que se utilizan para las medidas angulares:

— el ángulo recto o cuadrante;
— el grado sexagesimal;
— el radián;
— la centésima o grado centesimal.

Angulo recto o cuadrante

Es cada uno de los cuatro ángulos iguales que se producen en el corte perpendicular de dos rectas.

Un ángulo central cuyo arco es toda la circunferencia mide, pues, cuatro rectos.

Grado sexagesimal

Es la noventaava parte de un ángulo recto, lo que quiere decir que un ángulo recto tiene noventa grados sexagesimales

$$\boxed{1\ R = 90^\circ}$$

y el ángulo completo cuyo arco es toda la circunferencia tiene, entonces,

$$90^\circ \times 4 = 360^\circ.$$

Como submúltiplos del grado se usan el minuto (') y el segundo ('') sexagesimales, definidos mediante las siguientes equivalencias:

$$\boxed{1^\circ = 60' \quad ; \quad 1' = 60''}$$

Radián

Es el ángulo cuyo arco tiene la misma longitud que el radio. Se suele abreviar *rad.*

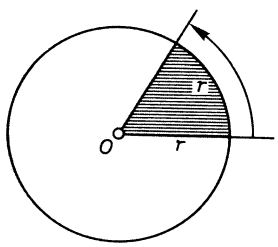


FIG. 2.24.

Teniendo en cuenta que un ángulo completo tiene por arco toda la circunferencia, cuya longitud es $L = 2\pi r$, es elemental deducir la equivalencia entre las medidas sexagesimales y los radianes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{radianes de un ángulo completo} = \dfrac{L}{r} = 2\pi \\ \text{grados de un ángulo completo} = 4 \times 90^\circ = 360^\circ \end{array}\right\} \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Ejercicio 48

Establézcanse en radianes las medidas de los ángulos

$$90^\circ \ ; \ 45^\circ \ ; \ 15^\circ \ ; \ 60^\circ \ ; \ 150^\circ \ ; \ 270^\circ \ ; \ 120^\circ.$$

Ejercicio 49

Exprésense en medidas sexagesimales los siguientes ángulos, dados en radianes

$$\pi \ ; \ \pi/3 \ ; \ \pi/6 \ ; \ 3\pi/5 \ ; \ \pi/2 \ ; \ 3\pi/4 \ ; \ \pi/12 \ : \ \pi/8.$$

Para operar con medidas sexagesimales, conviene adquirir la destreza de transformar, cuando convenga, expresiones complejas en incomplejas, y viceversa, como se expone en el siguiente

Siendo $\alpha = 31^\circ\ 15'$ y $\beta = 15^\circ\ 52'\ 13''$, calcúlese: $\alpha + \beta$; $\alpha - \beta$; 5α; $\alpha/2$.

$$\left.\begin{array}{r} 31^\circ\ 15' \\ 15^\circ\ 52'\ 13'' \end{array}\right\} +$$

$$\begin{array}{r} 46^\circ\ 67'\ 13'' \\ 47^\circ\ \ 7'\ 13'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31^\circ\ 15' \\ 5\ \times \\ \hline 155^\circ\ 75' = 156^\circ\ 15' \end{array}$$

$$31^\circ\ 15' = 30^\circ\ 75' = 30^\circ\ 74'\ 60'' \quad \left.\begin{array}{r} \\ 15^\circ\ 52'\ 13'' \end{array}\right\} -$$

$$\begin{array}{r} 15^\circ\ 22'\ 47'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 31^\circ \quad 15' & 2 \\ \cline{2-2} 11 & 15^\circ\ 37'\ 30'' \\ 1 \times 60 = 60' & \\ \cline{1-1} 75' & \\ 15 & \\ 1 \times 60 = 60'' & \\ 00 & \end{array}$$

Ejercicio 50

Recordando que el complemento de un ángulo es lo que le falta para valer un recto y que el suplemento es el ángulo que sumado a él produce uno de 180°, *determínense:*

a) *la quinta parte del complemento de* 17°;

b) *la tercera parte del complementario del suplementario de* $128^\circ\ 32'\ 14''$.

Ejercicio 51

Determínense en radianes los ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que uno de los agudos mide los 2/3 de la medida del otro.

Ejercicio 52

Dedúzcanse los valores de α, β *y* γ *en la figura* 2.25.

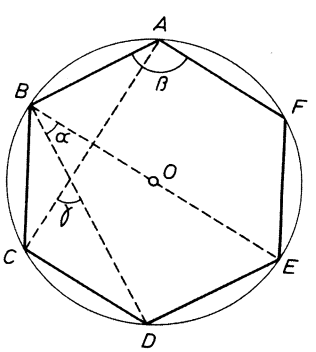


FIG. 2.25.

Ejercicio 53

Establézcase en medidas sexagesimales el valor del ángulo φ de la figura 2.26.

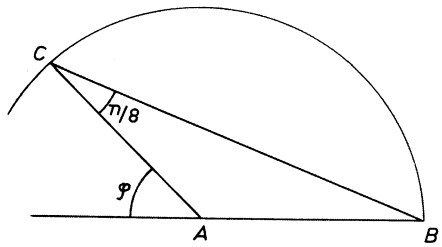


FIG. 2.26.

Ejercicio 54

Calcúlese la equivalencia sexagesimal del ángulo de 1 radián.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA

Para *fijar* un ángulo han de darse su medida, posición y orientación, lo cual exige establecer un sistema de referencia y un convenio de *barrido*.

Si se habla del ángulo $\alpha = \widehat{AOB}$, se entiende que el primer lado es el $\overline{AO}$, que su vértice es el punto O y que su segundo lado es el $\overline{OB}$. Pues bien, se construye un referencial en el plano cuyo primer eje se hace coincidir con el lado primero del ángulo y el segundo eje es la recta perpendicular al primero por el vértice que, entonces, hace de origen (Fig. 2.27):

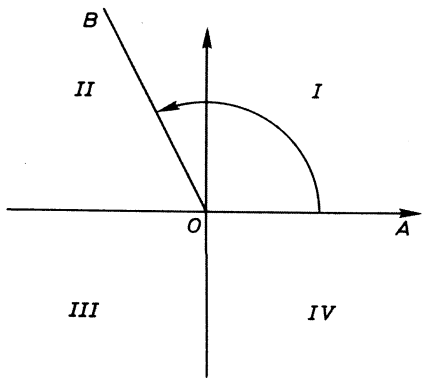


FIG. 2.27.

De este modo, el plano queda dividido en cuatro regiones angulares, llamadas *cuadrantes,* que se conviene en nombrarlas como se ha hecho en la figura: I, II, III y IV cuadrantes.

Así, se dice que los ángulos agudos pertenecen al cuadrante I; los convexos obtusos, al segundo (II), y los cóncavos, al tercero (III) o cuarto (IV) cuadrantes. Todavía han de tenerse en cuenta los ángulos mayores de 360°. Son ángulos que tienen «más de una vuelta»; se conviene en decir que pertenecen al cuadrante donde se dibuja su segundo lado.

Existen ángulos positivos y negativos, según el siguiente convenio de *barrido:*

> Si del primero al segundo lado se barre el ángulo en sentido contrario al de las agujas del reloj, el ángulo es *positivo;* si se hace en el sentido de giro de las agujas del reloj, entonces se trata de un ángulo negativo.

Ejercicio 55

Dibújense un ángulo de $\pi/3$ *rad y otro de* $-\pi/4$ *rad.*

Ejercicio 56

a) *Calcúlese el complementario de* $-\pi/4$ *rad; ¿en qué cuadrante se encuentra?*

b) *¿A qué cuadrante pertenece un ángulo de* 7236°?

3. RAZONES GONIOMETRICAS

3.1. Establecimiento

Establecido el sistema de referencia ortogonal, cualquier punto A del plano tiene cuatro parámetros de situación, interdependientes entre sí (figura 2.28):

— la distancia al origen, r;

— el ángulo positivo en el origen, formado por el eje de abscisas y ese segmento-distancia;

— su ordenada, y;

— su abscisa, x.

De esos cuatro parámetros, tres son rectilíneos con la relación $r = +\sqrt{x^2+y^2}$ y uno es angular; pues bien, con los tres lineales, tomados dos a dos, se forman todas las razones posibles, que son las seis que se tabulan con los nombres que se expresan y las abreviaturas que se establecen:

Nombre	*Abreviatura-razón*
seno	$\operatorname{sen} \alpha = y/r$
coseno	$\cos \alpha = x/r$
tangente	$\operatorname{tg} \alpha = y/x$
cosecante	$\operatorname{cosec} \alpha = r/y$
secante	$\sec \alpha = r/x$
cotangente	$\operatorname{cotg} \alpha = x/y$

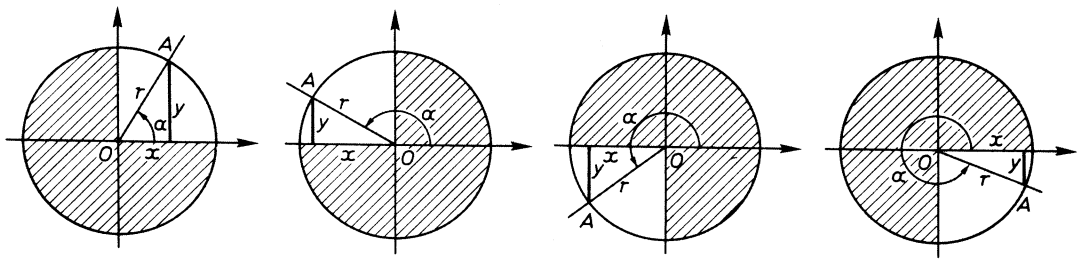


FIG. 2.28.

El valor de las razones goniométricas, así definidas, es independiente del punto A utilizado para su establecimiento, siendo exclusivamente función de la amplitud del ángulo α. En efecto, sobre la figura 2.29 puede observarse que los triángulos $\triangle OB_1A_1$, $\triangle OB_2A_2$, $\triangle OB_3A_3$, ..., son homotéticos (semejan-

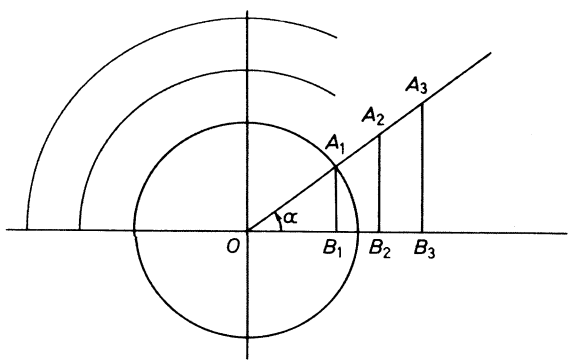


FIG. 2.29.

tes en posición de Thales), por lo que se pueden escribir las siguientes proporciones entre segmentos:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1}=\frac{A_2B_2}{OA_2}=\frac{A_3B_3}{OA_3}=\ldots=\operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{OB_1}{OA_1}=\frac{OB_2}{OA_2}=\frac{OB_3}{OA_3}=\ldots=\cos\alpha$$

$$\frac{A_1B_1}{OB_1}=\frac{A_2B_2}{OB_2}=\frac{A_3B_3}{OB_3}=\ldots=\operatorname{tg}\alpha$$

Bastaría invertir las tres series proporcionales para justificar la constancia de las otras tres razones goniométricas.

Ejercicio 57

Determínense las seis razones goniométricas del ángulo menor de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 m y 4 m.

Existen ángulos para los que no están definidas determinadas razones goniométricas; son aquéllas en las que el denominador se anula. Por ejemplo, la tangente de $\pi/2$ radianes no existe, ya que

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\operatorname{tg}90^\circ=\frac{y}{0}\,.$$

Ejercicio 58

Encuéntrense los ángulos para los que no están definidas algunas de las razones goniométricas.

3.2. Signo de las razones goniométricas de un ángulo

Considerada la distancia del punto al origen siempre positiva, las razones goniométricas tienen el signo que le aporten la ordenada o/y la abscisa que en ellas intervengan.

Ejemplo 37

Un ángulo de 120° pertenece al segundo cuadrante (II), presentando ordenada positiva y abscisa negativa, lo que da para sus seis razones goniométricas los siguientes signos:

α	sen	cos	tg	cosec	sec	ctg
120°	+	−	−	+	−	−

Ejercicio 59

El coseno de 300° *es* 1/2. *Calcúlese el seno de* $5\pi/3$.

El cuadro de la figura 2.30 tabula los signos de las razones goniométricas, según el cuadrante al que pertenezca el ángulo.

Cuadrante	sen	cos	tg	cosec	sec	ctg
	+	+	+	+	+	+
	+	−	−	+	−	−
	−	−	+	−	−	+
	−	+	−	−	+	−

FIG. 2.30.

Ejercicio 60

Se sabe que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/3$. *Hállese entre qué dos valores positivos que se diferencien en* $\pi/2$ *radianes se encuentra* α.

3.3. Relaciones entre las razones goniométricas

Las seis razones goniométricas de un ángulo están relacionadas entre sí. En efecto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad [1]$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad [2]$$

Elevando al cuadrado ambas igualdades * y sumando, resulta:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad [3]$$

* Al elevar al cuadrado sen α, se acostumbra a escribir $\operatorname{sen}^2\alpha$, en lugar de $(\operatorname{sen}\alpha)^2$.

Si se divide la igualdad [1] entre la [2], se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{r}:\frac{x}{r}=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha} \qquad [4]$$

También,

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}=\frac{1}{y/r}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad [5]$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{1}{x/r}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}} \qquad [6]$$

A partir de las relaciones conseguidas, dada cualquiera de las razones goniométricas de un ángulo, se puede intentar conocer todas las demás. Por ejemplo, si es dato $\operatorname{sen}\alpha=a$,

$$a^2+\cos^2\alpha=1 \Longrightarrow \cos^2\alpha=1-a^2 \Longrightarrow \cos\alpha\pm\sqrt{1-a^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{1-a^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{a}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1-a^2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$$

Puede observarse que, en este caso, el coseno, la tangente, la secante y la cotangente no quedan determinadas por el hecho de conocer el seno, pues el signo doble $\pm$ que aparece da lugar, para esas razones goniométricas, a valores opuestos.

Entonces, para determinar un ángulo por una de sus razones goniométricas, es necesario, además, dar el intervalo angular en el que se encuentra. De este modo puede «escogerse signo», cuando aparezca el doble $\pm$ en los cálculos.

Además de las cuatro identidades fundamentales recuadradas, son muy útiles las dos siguientes, por lo que también conviene memorizarlas.

$$\sec^2 \alpha = \frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\boxed{\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \qquad [7]$$

Ejercicio 61

Justifique la identidad goniométrica

$$\boxed{\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \qquad [8]$$

siguiendo la técnica que se ha utilizado para justificar la [7].

Ejercicio 62

Establézcanse las razones goniométricas que estén definidas, de los ángulos-frontera de los cuadrantes, es decir, de

$$0 \text{ rad} \quad ; \quad \pi/2 \text{ rad} \quad ; \quad \pi \text{ rad} \quad ; \quad 3\pi/2 \text{ rad} \quad ; \quad 2\pi \text{ rad}.$$

Ejercicio 63

Conociendo que $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ *y sabiendo que* $\pi/2 < \alpha < \pi$, *calcúlense sus otras cinco razones goniométricas. Análogamente, si* $\operatorname{cotg} \beta = t$, *con* $\pi/2 < \beta < \pi$, *hállense las demás razones de* β.

Ejercicio 64

Observando la identidad [1], *encuéntrense los intervalos en los que pueden tomar valores* $\operatorname{sen} \alpha$ *y* $\cos \alpha$.

Ejercicio 65

¿Qué se puede asegurar de un ángulo α *del que se escribe* $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{5}$?

Ejercicio 66

Justifíquense las siguientes identidades goniométricas:

a) $\sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha$;

b) $\operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

c) $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2$;

d) $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

4. SEGMENTOS GONIOMETRICOS. CIRCUNFERENCIA UNIDAD

La *circunferencia unidad* es aquella cuyo radio se considera la unidad lineal.

Si, con origen en el centro de la circunferencia, se dibujan los ejes ortogonales de referencia, se obtiene el *círculo goniométrico,* en el que las razones goniométricas de cualquier ángulo central vienen representadas por segmentos orientados. En efecto, sea el ángulo α de la figura 2.31:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{r} = \frac{AB}{1} = AB$$

$$\cos\alpha = \frac{OB}{r} = \frac{OB}{1} = OB$$

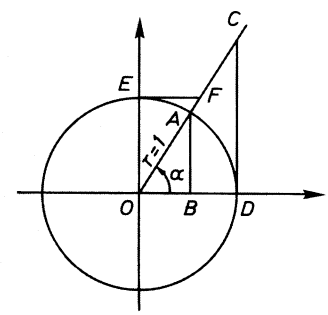


FIG. 2.31.

Al dibujar el segmento CD se obtienen dos triángulos semejantes, lo que permite escribir la correspondiente proporción entre sus lados:

$$\triangle OBA \sim \triangle ODC \Longrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{CD}{r} = \frac{CD}{1} = CD.$$

El segmento que representa a la cosecante de α se obtiene, de igual modo, de la semejanza $\triangle OBA \sim \triangle OEF$:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{r} = \frac{OF}{1} = OF.$$

Considerando la semejanza entre los triángulos $\triangle OBA$ y $\triangle ODC$, se consigue el segmento representativo de la secante de α:

$$\sec\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC}{r} = \frac{OC}{1} = OC.$$

Finalmente, al trazar el segmento EF, se consigue el triángulo OEF, que es semejante al OBA, ya que $\widehat{B}=\widehat{E}=90^{\circ}$ y $\widehat{F}=\alpha$, por alternos internos. Entonces,

$$\triangle OEF \sim \triangle OBA \Longrightarrow \operatorname{ctg}\alpha=\frac{OB}{AB}=\frac{EF}{OE}=\frac{EF}{r}=\frac{EF}{1}=EF.$$

Así, pues, el valor absoluto de las razones goniométricas de un ángulo del primer cuadrante coincide con la longitud de los *segmentos goniométricos* correspondientes, usando el radio como unidad.

Por el que se refiere al signo, esas medidas vendrán afectadas del que les corresponda, según el cuadrante al que pertenezca el ángulo (en este primer cuadrante todas son positivas); aunque, siendo el segmento-seno, el segmento-coseno, el segmento-tangente y el segmento-cotangente paralelos a los ejes, para esos cuatro segmentos el signo se observa directamente en su propia orientación cartesiana.

Ejercicio 67

Tómese un papel milimetrado, transpórtese un ángulo de 40° *sobre la circunferencia goniométrica y establézcanse por observación directa los valores de sus seis razones goniométricas. Radio-unidad* = 20 *mm.*

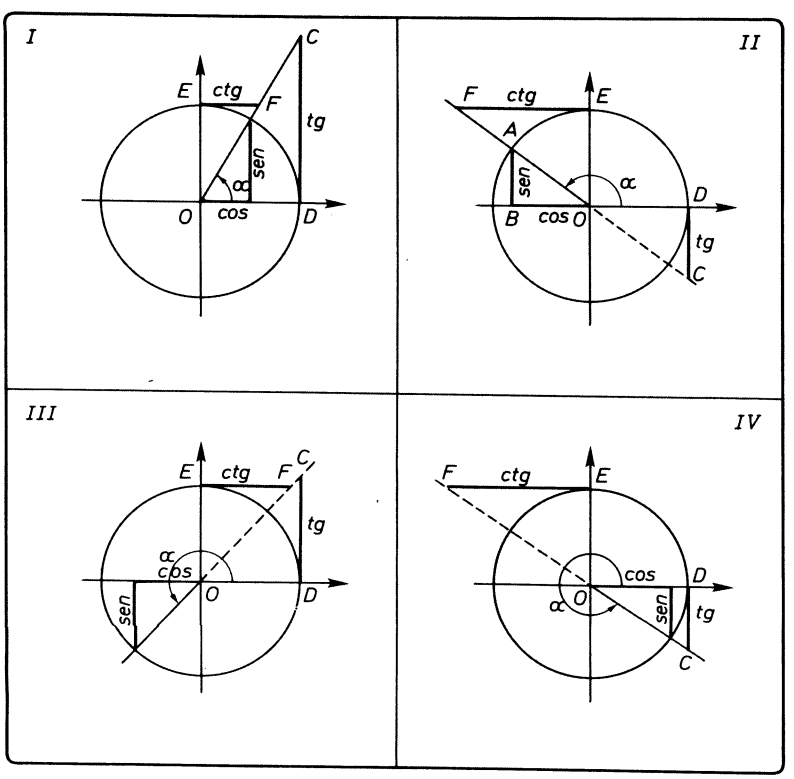


FIG. 2.32.

Ejercicio 68

Establézcanse las correspondientes semejanzas de triángulos que permitan establecer sobre la circunferencia unidad las razones goniométricas de un ángulo del segundo cuadrante, con los segmentos que se dibujan en la figura 2.32.

De la misma manera quedan dibujados los segmentos goniométricos en los otros cuadrantes (figura 2.32).

Conviene observar que

— el segmento-tangente siempre es perpendicular en D al eje de abscisas;
— el segmento-cotangente siempre es perpendicular en E al eje de ordenadas.

En los cuatro cuadrantes no se han marcado, para mayor claridad de figura

$$\operatorname{cosec} \alpha = OF$$
$$\sec \alpha = OC$$

Estos segmentos goniométricos permiten dibujar con facilidad ángulos cuyas razones goniométricas se conozcan.

Ejemplo 28

Dibújese un ángulo del tercer cuadrante, cuya secante sea -3

$$\sec \alpha = -3 \Longrightarrow \cos \alpha = -1/3$$

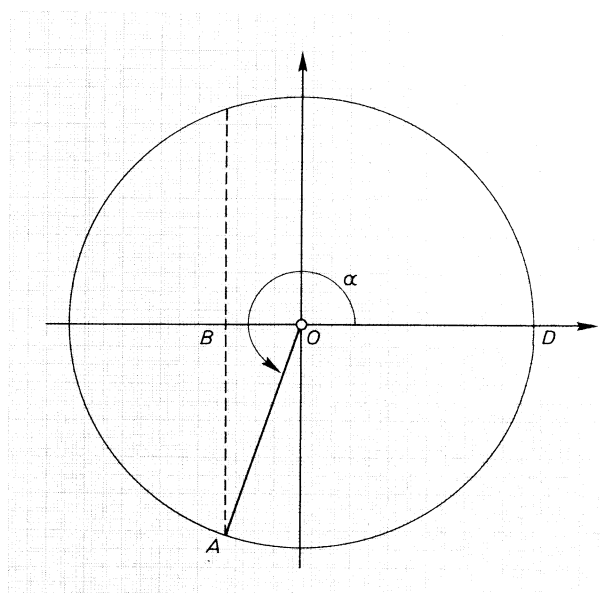


FIG. 2.33.

— se traza una circunferencia goniométrica de radio-unidad 3 cm;
— se toma $OB = 1/3\ r = 1$ cm;
— se traza por B la perpendicular al eje de abscisas.

El ángulo cóncavo $\widehat{DOA}$ es el α pedido.

Ejercicio 69

Dibújense dos ángulos distintos cuyo coseno sea 3/4.

Ejercicio 70

Constrúyanse dos ángulos distintos cuyo seno sea $-4/5$.

Ejercicio 71

Trácese el ángulo obtuso cuya tangente valga -2.

Ejercicio 72

Dibújese un ángulo agudo α, *tal que* $\operatorname{cosec} \alpha = 1{,}25$.

También se puede usar la circunferencia unidad para hacer un cálculo rápido de las razones goniométricas de algunos ángulos que, por su frecuencia de utilización, son importantes; son los ángulos de 30°, 45° y 60°.

Cálculo de las razones goniométricas de un ángulo de 45°.

El triángulo $\widehat{OBA}$ es rectángulo e isósceles; por tanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$

$$1^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OB}^2 \Longrightarrow 1 = 2 \cdot \overline{OB}^2$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} = \sqrt{2}/2$$

$$\operatorname{sen} 45° = \overline{AB}/1 = \sqrt{2}/2$$

$$\cos 45° = \overline{OB}/1 = \sqrt{2}/2$$

$$\operatorname{tg} 45° = \overline{AB}/\overline{OB} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 45° = 1/\operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}$$

$$\sec 45° = 1/\cos 45° = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg} 45° = 1/\operatorname{tg} 45° = 1$$

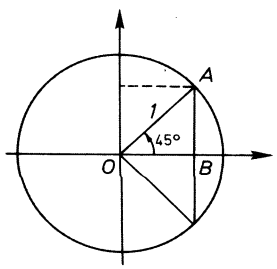


FIG. 2.34.

Ejercicio 73

Sobre la figura 2.35 *calcúlense las razones goniométricas de un ángulo de* 30°.

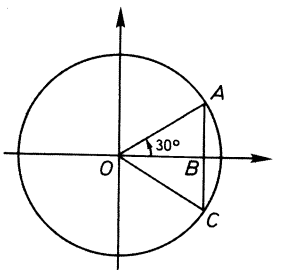


FIG. 2.35.

Ejercicio 74

Usando la figura 2.36, *determínense las razones goniométricas de un ángulo de* 60°.

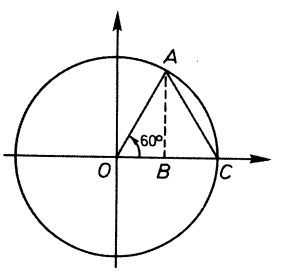


FIG. 2.36.

Manejando con soltura la construcción de medias proporcionales, también se pueden construir ángulos de razones goniométricas irracionales, como se indica en el

Dibújese un ángulo agudo α, tal que $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2}/3$.

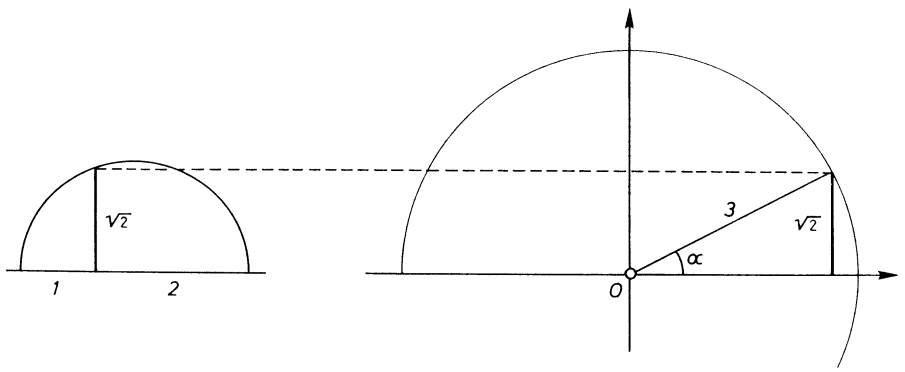


FIG. 2.37.

Ejercicio 75

Constrúyase el ángulo agudo α, *cuya tangente es* $\sqrt{3}/4$.

5. RELACIONES GONIOMETRICAS ENTRE ANGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

En este apartado se justifican siete proposiciones que permiten establecer las razones goniométricas de cualquier ángulo en función de las de un ángulo agudo, es decir, de las de un ángulo del primer cuadrante. Es el problema que en cálculo goniométrico se llama *reducción al primer cuadrante.*

Quiere decirse que basta conocer las razones goniométricas de los ángulos del intervalo $0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ para saber las de cualquier otro ángulo. Incluso, como se verá al final de este epígrafe, es posible conocer cualquier función goniométrica de cualquier ángulo si se saben las de los ángulos menores de 45°.

5.1. Angulos que se diferencian en un número entero de vueltas

Son ángulos del tipo α y $(\alpha + 360\ k)$.

Dibujados sobre el sistema de referencia goniométrico en nada se diferenciarían, pues sus primeros lados coinciden, y sus segundos, también. Por tanto:

> **I.** Los ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas tienen todas sus razones goniométricas iguales.

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \quad ; \quad \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \; ;$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \quad ; \quad \sec\frac{\pi}{4}=\sec\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \; ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \quad ; \quad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) .$$

Adviértase que k vueltas en medidas sexagesimales es $360^\circ k$ y en radianes es $k \cdot 2\pi$, que usualmente se escribe $2k\pi$.

Ejercicio 76

Determínense las razones goniométricas de un ángulo de $25\pi/4$.

5.2. Angulos suplementarios

Sean los ángulos suplementarios de la figura 2.38, α y $(\pi-\alpha)$, que dan lugar sobre la circunferencia goniométrica a los triángulos OBA y ODC, simétricos respecto del eje de ordenadas.

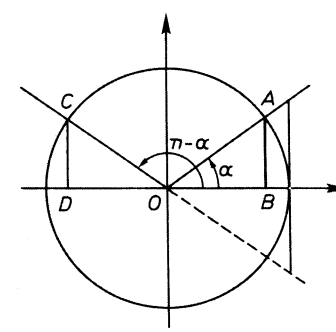


FIG. 2.38.

Por tanto, se trata de triángulos iguales en los que se verifica

$$\overline{AB}=\overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{OB}=-\overline{OD} \; ,$$

por lo que se puede escribir

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$

y como consecuencias inmediatas

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{cosec}(\pi-\alpha) &= \operatorname{cosec}\alpha \\ \sec(\pi-\alpha) &= -\sec\alpha \\ \operatorname{ctg}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}$$

II. Las razones goniométricas de dos ángulos suplementarios son opuestas, excepto los senos y sus inversas las cosecantes, que son iguales.

$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen}(180-135) = \operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}/2$; $\operatorname{cosec} 135° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$;

$\cos 135° = -\cos(180-135) = -\cos 45° = -\sqrt{2}/2$; $\sec 135° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$;

$\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg}(180-135) = -\operatorname{tg} 45° = -1$; $\operatorname{ctg} 135° = -\operatorname{ctg} 45° = -1$.

Ejercicio 77

Determínense las razones goniométricas de $\alpha = 150°$ *y de* $\beta = 120°$.

5.3. Angulos que se diferencian en π radianes

Dos ángulos α y $(\pi+\alpha)$, como los de la figura 2.39, dan lugar sobre la circunferencia goniométrica a los dos triángulos OBA y ODC que son inversamente iguales, pues son simétricos respecto del origen de coordenadas. En ellos se verifica

$$\overline{AB} = -\overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{OB} = -\overline{OD} \ ,$$

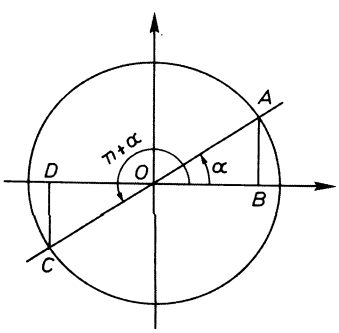


FIG. 2.39.

lo que da lugar a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha \\
\operatorname{tg}(\pi+\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{cosec}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha \\
\sec(\pi+\alpha) &= -\sec\alpha \\
\operatorname{ctg}(\pi+\alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha
\end{aligned}$$

III. Las razones goniométricas de dos ángulos que se diferencian en π radianes son opuestas, excepto las tangentes y cotangentes, que son iguales.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 240^\circ &= -\operatorname{sen}(240\text{-}180) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\sqrt{3}/2; \\
\cos 240^\circ &= -\cos(240\text{-}180) = -\cos 60^\circ = -1/2; \\
\operatorname{tg} 240^\circ &= \operatorname{tg}(240\text{-}180) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \\
\operatorname{cosec} 240^\circ &= -\operatorname{cosec} 60^\circ = -2\sqrt{3}/3; \\
\sec 240^\circ &= -\sec 60^\circ = -2; \\
\operatorname{ctg} 240^\circ &= \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}/3.
\end{aligned}$$

Ejercicio 78

Calcúlense las razones goniométricas de $\alpha = 210^\circ$ *y de* $\beta = 5\pi/4$.

5.4. Angulos cuya suma es un ángulo completo

En la figura 2.40, los ángulos α y $(2\pi - \alpha)$ suman 2π radianes, produciéndose dos triángulos *OBA* y *OBC* que, por ser simétricos respecto del eje de abscisas, son iguales, cumpliéndose que

$\overline{OB}$ común y $\overline{AB} = \overline{CB}$.

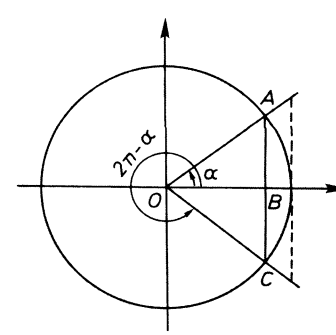


FIG. 2.40.

Entonces, las relaciones entre sus razones goniométricas son:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\cos(2\pi-\alpha) &= \cos\alpha \\
\operatorname{tg}(2\pi-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{cosec}(2\pi-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha \\
\sec(2\pi-\alpha) &= \sec\alpha \\
\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha
\end{aligned}$$

IV. Las razones goniométricas de dos ángulos que suman 2π radianes son opuestas, excepto los cosenos y sus inversas, las secantes, que son iguales.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\,330^\circ &= -\operatorname{sen}(360\text{-}330) = -\operatorname{sen}\,30^\circ = -1/2\,; \\
\cos 330^\circ &= \cos(360\text{-}330) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2\,; \\
\operatorname{tg}\,330^\circ &= -\operatorname{tg}\,(360\text{-}330) = -\operatorname{tg}\,30^\circ = -\sqrt{3}/3\,; \\
\operatorname{cosec}\,330^\circ &= -\operatorname{cosec}\,30^\circ = -2\,; \\
\sec 330^\circ &= \sec 30^\circ = 2\sqrt{3}/3\,; \\
\operatorname{ctg}\,330^\circ &= -\operatorname{ctg}\,30^\circ = -\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio 79

Hállense las razones goniométricas de $\alpha = 300^\circ$ *y de* $\beta = 7\pi/4$.

Otro modo de describir el ángulo $(2\pi-\alpha)$ es $(-\alpha)$, como puede observarse en la figura 2.41. Por tanto, todo lo dicho en IV también es válido para los ángulos opuestos α y $(-\alpha)$.

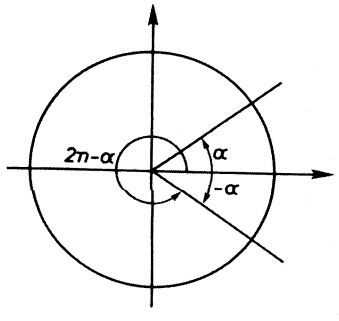


FIG. 2.41.

IV *bis.* Las razones goniométricas de dos ángulos opuestos son opuestas, excepto los cosenos y sus inversas, las secantes, que son iguales.

Como se dijo al principio, con estas cuatro proposiciones se puede *reducir al primer cuadrante* cualquier ángulo. Pero todavía es posible alcanzar la reducción al *primer semicuadrante,* pues la proposición V que a continuación se desarrolla permite expresar las razones goniométricas de cualquier ángulo en función de las de uno menor o igual a $45^\circ = \pi/4$ rad.

5.5. Angulos complementarios

En la figura 2.42, los ángulos complementarios α y $(\pi/2 - \alpha)$ dan lugar a los triángulos OBA y ODC que son iguales porque

$$\overline{OC} = \overline{OA} = r$$
$$\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$$
$$\hat{C} = \alpha$$

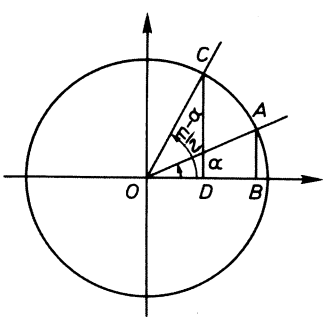


FIG. 2.42.

entonces,

$$\overline{AB} = \overline{OD} \quad \text{y} \quad \overline{OB} = \overline{CD} \ ,$$

lo que permite escribir:

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(\pi/2 - \alpha) = \sec\alpha$$
$$\sec(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

V. Las razones goniométricas de un ángulo coinciden con las co-razones de su complementario.

$$\text{sen } 60^\circ = \cos(90-60) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad \text{cosec } 60^\circ = \sec 30^\circ = 2\sqrt{3}/3;$$
$$\cos 60^\circ = \text{sen}(90-30) = \text{sen } 30^\circ = 1/2 \quad ; \quad \sec 60^\circ = \text{cosec } 30^\circ = 2;$$
$$\text{tg } 60^\circ = \text{ctg}(90-60) = \text{ctg } 30^\circ = \sqrt{3} \quad ; \quad \text{ctg } 60^\circ = \text{tg } 30^\circ = \sqrt{3}/3.$$

Ejercicio 80

Expresar como razones goniométricas de un ángulo menor de $\pi/4$ rad, *las de* 105°.

5.6. Angulos que se diferencian en $\pi/2$ radianes

En la figura 2.43, los ángulos α y $(\pi/2+\alpha)$ determinan los triángulos OBA y ODC que son iguales porque

$$\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \quad ; \quad \overline{OA} = \overline{OC} = r \quad ;$$

$\widehat{C} = \alpha$ (por ser ambos agudos y tener sus lados perpendiculares).

Entonces,

$$\overline{OB} = \overline{CD} \quad \text{y} \quad \overline{AB} = -\overline{OD},$$

lo que da lugar a

$$\begin{aligned}
\text{sen}(\pi/2+\alpha) &= \cos\alpha \\
\cos(\pi/2+\alpha) &= -\text{sen}\,\alpha \\
\text{tg}(\pi/2+\alpha) &= -\text{ctg}\,\alpha \\
\text{cosec}(\pi/2+\alpha) &= \sec\alpha \\
\sec(\pi/2+\alpha) &= -\text{cosec}\,\alpha \\
\text{ctg}(\pi/2+\alpha) &= -\text{tg}\,\alpha
\end{aligned}$$

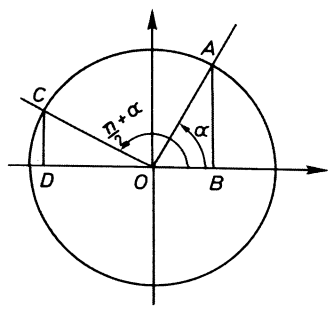


FIG. 2.43.

VI. Las razones goniométricas de dos ángulos que se diferencian en $\pi/2$ radianes son tales que las razones del uno son iguales a las opuestas de las co-razones del otro, excepto los senos y cosecantes, que coinciden con los cosenos y secantes, respectivamente.

Ejemplo 16

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 135^\circ &= \cos(135-90) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2;\\
\cos 135^\circ &= -\operatorname{sen}(135-90) = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\sqrt{2}/2;\\
\operatorname{tg} 135^\circ &= -\operatorname{ctg}(135-90) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1;\\
\operatorname{cosec} 135^\circ &= \sec 45^\circ = \sqrt{2};\\
\sec 135^\circ &= -\operatorname{cosec} 45^\circ = -\sqrt{2};\\
\operatorname{ctg} 135^\circ &= -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 81

El sen $(-\alpha) = 12/13$. *Determínese el* sen $(90-\alpha)$.

Ejercicio 82

Siendo α, β y γ los tres ángulos de un triángulo, justifíquese la identidad

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\beta+\gamma).$$

Ejercicio 83

Dedúzcase el valor de la suma de los cuadrados de los senos de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Ejercicio 84

Siendo ABC un triángulo acutángulo, demuéstrese que es correcta la igualdad

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(B+C) = 0.$$

6. FUNCIONES CIRCULARES

Todo número real puede ser la medida en radianes de un ángulo. Si a cada real x se le hace corresponder cada una de las seis razones goniométricas del ángulo de x radianes, quedan establecidas las llamadas *funciones circulares,* que se pasan a analizar.

6.1. Función seno

El dominio de la función seno es el conjunto de los números reales, R, y su recorrido es el intervalo cerrado real $[-1, +1] \subset R$. En efecto: es fácil observar sobre cualquiera de las figuras anteriores que

$$-\text{radio} \leqslant \text{ordenada} \leqslant \text{radio}.$$

Dividiendo los tres miembros de esa desigualdad por el radio, resulta:

$$-1 \leqslant \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} \leqslant 1$$

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1}$$

De igual manera se obtiene

$$\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

Así, pues,

$$R \xrightarrow{\text{sen}} [-1, +1] \qquad R \xrightarrow{\cos} [-1, +1]$$
$$x \longrightarrow \operatorname{sen} x \qquad x \longrightarrow \cos x$$

La representación gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ se llama *sinusoide*, y su construcción por puntos resulta muy fácil de realizar, pues basta trasladar las ordenadas de la circunferencia-unidad a su representación cartesiana, como se hace en la figura 2.44.

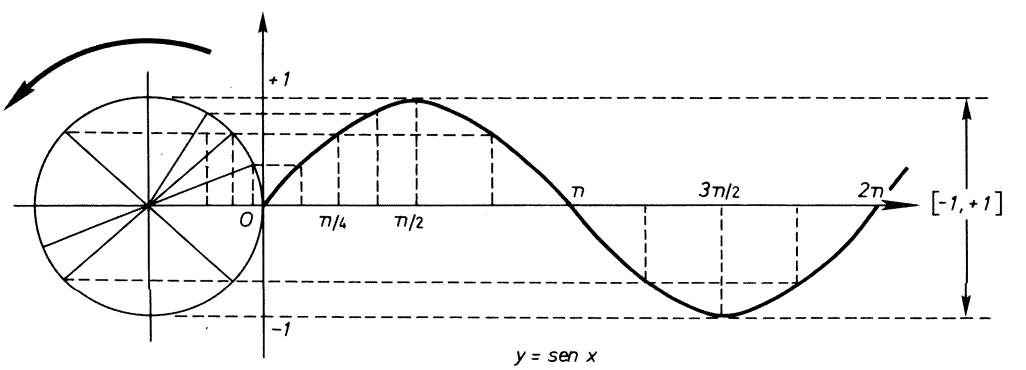


FIG. 2.44.

La función $y = \operatorname{sen} x$ presenta las siguientes características:

1. *Es uniforme (aplicación)*

$$\forall\, x \in R\,, \quad \exists^*\, y \in [-1,\, +1] / y = \operatorname{sen} x.$$

Esta uniformidad se puede observar sobre la gráfica sinusoide, porque al trazar cualquier recta paralela al eje de ordenadas corta a la gráfica en un solo punto.

2. *No es unívoca (=no inyectiva)*

Efectivamente, cualquier $y \in [-1, +1]$ es imagen de una infinidad de ángulos:

$$y = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)\,, \quad \forall\, k \in Z\,.$$

La no univocidad de la función queda patente sobre la gráfica sinusoidal, pues al trazar una paralela al eje de abscisas, dentro del recorrido de la función, corta a la gráfica en infinitos puntos.

3. *Variación*

La función seno crece en el primer cuadrante desde 0 a 1; decrece en el segundo y tercero, desde 1, pasando por el valor 0, hasta -1, y crece en el cuarto cuadrante desde -1 hasta 0. El cuadro de la figura 2.45 recoge esta variación:

x	$0°$ ↗	$90°$ ↗	$180°$ ↗	$270°$ ↗	$360°$
$\operatorname{sen} x$	0 ↗	$+1$ ↘	0 ↘	-1 ↗	0

FIG. 2.45.

4. *Es periódica, de periodo* 2π

Se dice que la función $f(x)$ es periódica si se cumple que

$$f(x) = f(x + kp),$$

siendo $k \in Z$ y p una constante real, no nula, denominada periodo.

Pues bien, $y = \operatorname{sen} x$ es periódica, ya que

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$$

5. *Es continua en R*

En la figura 2.46 se observa que, fijado un ángulo a,

$$\forall\, x \in R\,, \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| < |x - a|$$

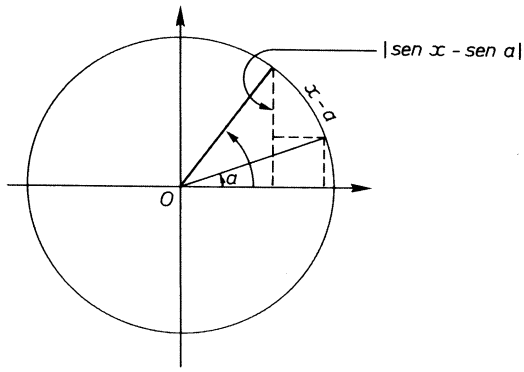


FIG. 2.46.

Por tanto, si

$$|x-a|<\epsilon=\delta \Longrightarrow |\text{sen } x-\text{sen } a|<\epsilon.$$

Nota: Esta «justificación gráfica» viene obligada por el hecho de que en este curso no se dispone todavía de la fórmula goniométrica del seno de la suma de ángulos.

6.2. Función coseno

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\cos} & [-1, +1] \\ x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

La gráfica de la función coseno recibe el nombre de *cosinusoide,* y la técnica de su dibujo es similar a la seguida para el trazado de la sinusoide, cuidando de «levantar» las abscisas a ordenadas (Fig. 2.47).

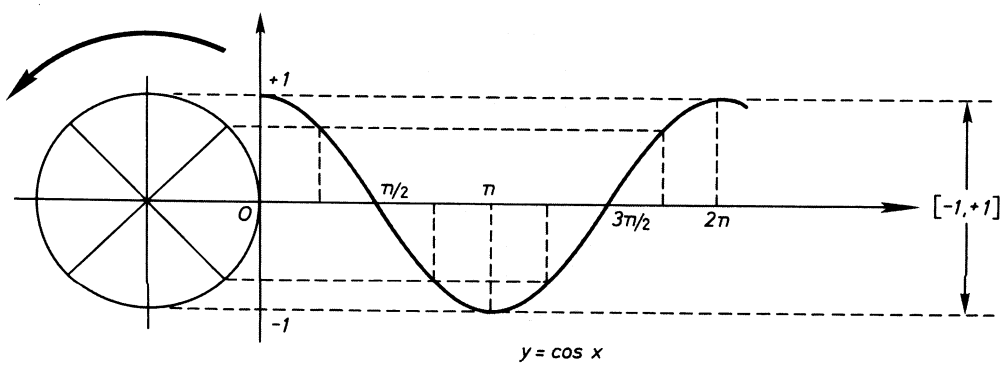


FIG. 2.47.

El análisis de la función $y=\cos x$ arroja los siguientes resultados:

1. *Es uniforme (aplicación)*

$$\forall\, x \in R\,, \quad \exists^* y \in [-1, +1]/y=\cos x$$

La uniformidad se detecta sobre la gráfica al trazar una paralela cualquiera al eje de ordenadas: sólo corta a la cosinusoide en un punto.

2. *No es unívoca (=no inyectiva)*

Un $y \in [-1, +1]$ puede ser coseno de una infinidad de ángulos:

$$y=\cos(x+2k\pi)\,, \quad \forall\, k \in Z$$

La no univocidad de la función coseno se observa sobre su gráfica, pues al trazar una paralela dentro de su recorrido al eje de abscisas, la cosinusoide queda cortada en infinitos puntos.

3. *Variación*

El cuadro de la figura 2.48 esquematiza la variación de la función coseno.

x	$0°$ ↗	$90°$ ↗	$180°$ ↗	$270°$ ↗	$360°$
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

FIG. 2.48.

4. *Es periódica, de periodo* 2π

$$\cos x=\cos(x+2k\pi)$$

5. *Es continua en* R

Como $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, y la compuesta de dos funciones continuas $y=\operatorname{sen} u$, y $u=\frac{\pi}{2}-x$, es continua, evidentemente, la función coseno es continua en R.

$$\lim_{x\to a} \cos x=\cos a\,, \quad \forall\, a \in R$$

6.3. Función tangente

La función tangente no está definida para todo real. Efectivamente, su dominio no es el conjunto de los números reales, R, sino un subconjunto suyo.

Recuérdese que la razón goniométrica *tangente* quedaba establecida por el cociente

$$\text{tangente} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$$

Entonces, cuando el denominador abscisa es cero, la razón tangente no está definida. Los ángulos a los que les corresponde abscisa nula son 90°, 270°, ..., en general, todos los que son un múltiplo impar del ángulo recto. De modo que, expresados en radianes, no tienen tangente los ángulos de la forma

$$\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in Z\right\}.$$

Visto lo que precede, el dominio de la función tangente es el subconjunto A de los reales

$$A = R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in Z\right\}$$

quedando establecida finalmente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{tg}} & R \\ x & \longrightarrow & \text{tg}\, x \end{array}$$

La gráfica de la función $y = \text{tg}\, x$ se dibuja, siguiendo la técnica anterior, según se indica en la figura 2.49.

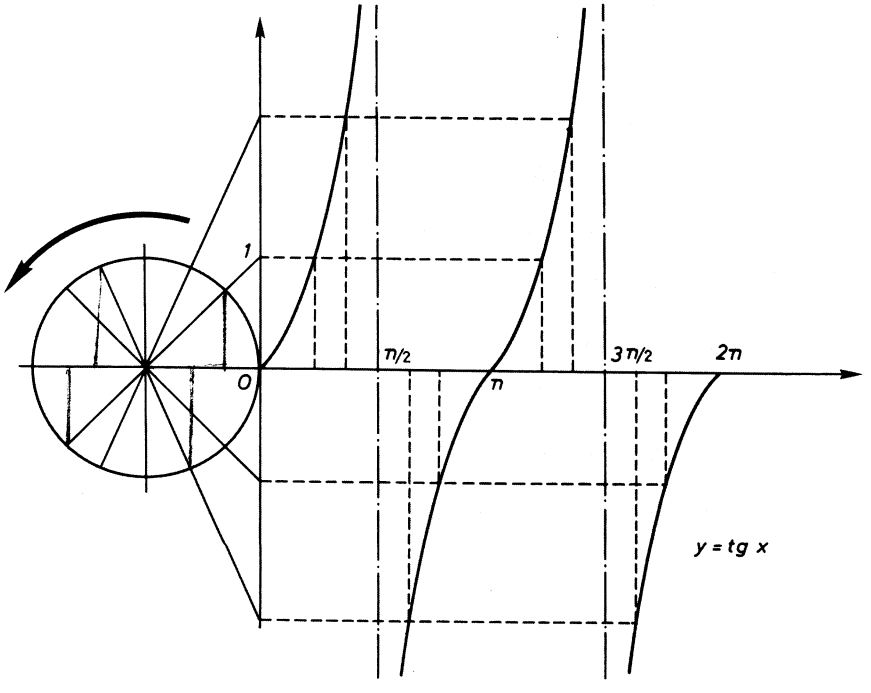


FIG. 2.49.

Así, pues, la función $y = \operatorname{tg} x$ tiene las siguientes características:

1. *Es discontinua en R*

   Los puntos de discontinuidad son los del subconjunto real

$$\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in Z\right\}.$$

2. *Es uniforme* y creciente en cada uno de los abiertos que forman su dominio

   Su dominio A también se puede expresar así:

$$\bigcup_{k \in Z}\left((2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

3. *Variación*

   La función $y = \operatorname{tg} x$ presenta el siguiente cuadro de variación:

x	$0°$ ↗	$90°$	↗	$180°$	↗	$270°$	↗	$360°$
$\operatorname{tg} x$	0 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0

FIG. 2.50.

4. *Es periódica y,* por tanto, *no unívoca*

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi).$$

   Su periodo es π.

6.4. Función cosecante

La función cosecante no está definida para múltiplos pares de π. En efecto:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}},$$

y en los ángulos como π, 2π, ... radianes la ordenada es nula. Por tanto, su dominio es

$$\boxed{A = R - \{k\pi,\ k \in Z\}}$$

Respecto de su recorrido, obsérvese que

$$|\text{radio}| \geqslant |\text{ordenada}|,$$

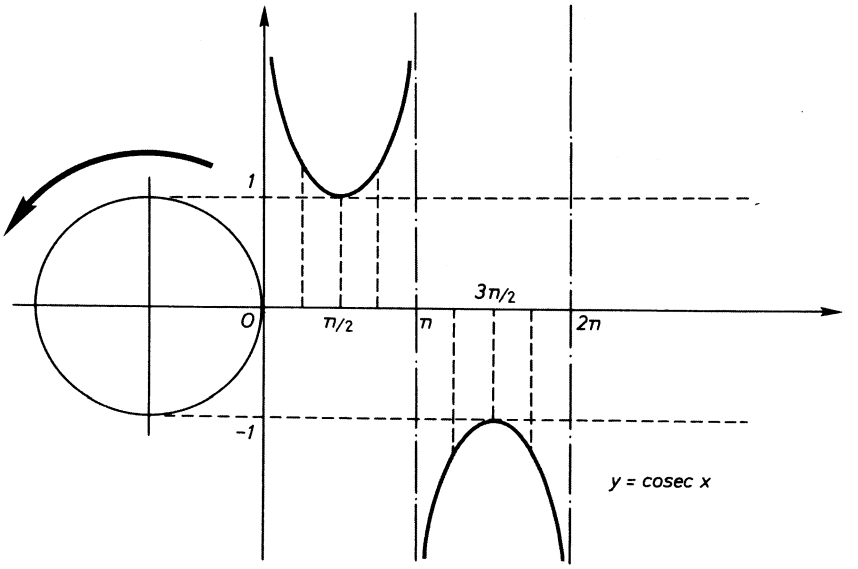


FIG. 2.51.

y, por tanto,

$$|\text{cosec } x| \geqslant 1 \iff \begin{cases} \text{cosec } x \geqslant 1 \\ \text{o} \\ \text{cosec } x \leqslant -1 \end{cases}$$

Ello supone que la función $y = \text{cosec } x$ no puede tomar valores en el abierto $(-1, 1)$. Su recorrido es, pues,

$$\boxed{C = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}$$

La gráfica de la función cosecante se dibuja en la figura 2.51.
Puede observarse que la función cosecante es periódica de periodo 2π.

$$\text{cosec } x = \text{cosec } (x + 2k\pi)$$

6.5. Función secante

La gráfica de la función $y = \sec x$, que aparece en la figura 2.52, se corresponde con las siguientes características analíticas:

1. *Dominio*

Siendo

$$\text{secante } x = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}},$$

en todos los puntos reales, correspondientes a ángulos de abscisas nula, la función $y = \sec x$ no está definida. De este modo, el dominio es el subconjunto real

$$A = R - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z \right\}$$

2. *Recorrido*

La función $y = \sec x$, al igual que la función cosecante, no toma valores en el abierto $(-1, +1)$, de manera que su recorrido es el conjunto

$$C = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

3. *Es periódica,* de periodo 2π.

$$\sec x = \sec (x + 2k\pi).$$

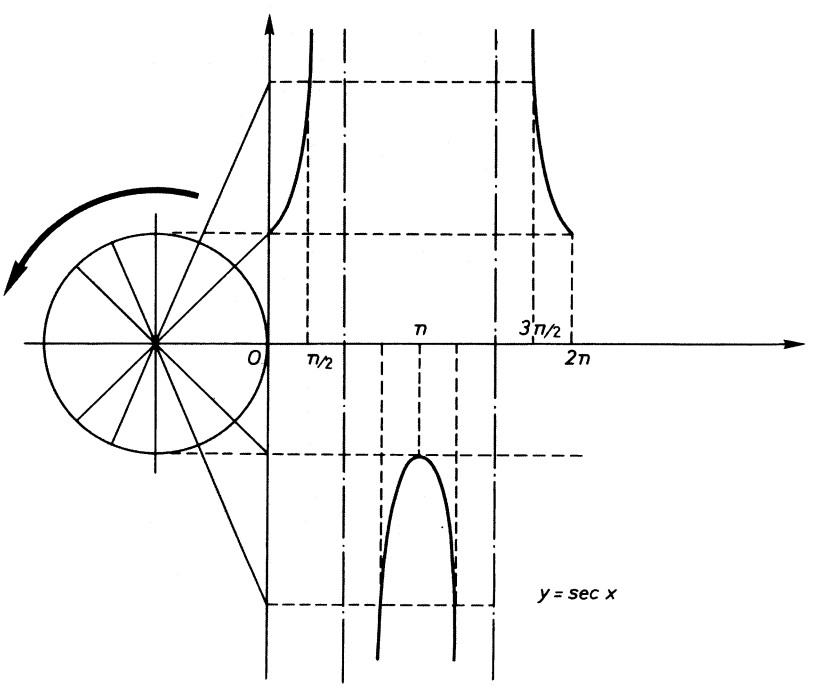


FIG. 2.52.

6.6. Función cotangente

La función cotangente, cuya gráfica se dibuja en la figura 2.53, presenta las siguientes características:

1. *Dominio*

La función cotangente no está definida en todo R, ya que a ángulos como 0, π, 2π, ... radianes les corresponde una ordenada nula, lo que deja sin sentido la razón cotangente:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{\text{abscisa}}{0}.$$

Entonces, su dominio es el conjunto

$$A = R - \{k\pi,\ k \in Z\}.$$

2. *Recorrido*

Cualquier número real puede ser cotangente de un ángulo. El recorrido de la función $y = \operatorname{ctg} x$ es R.

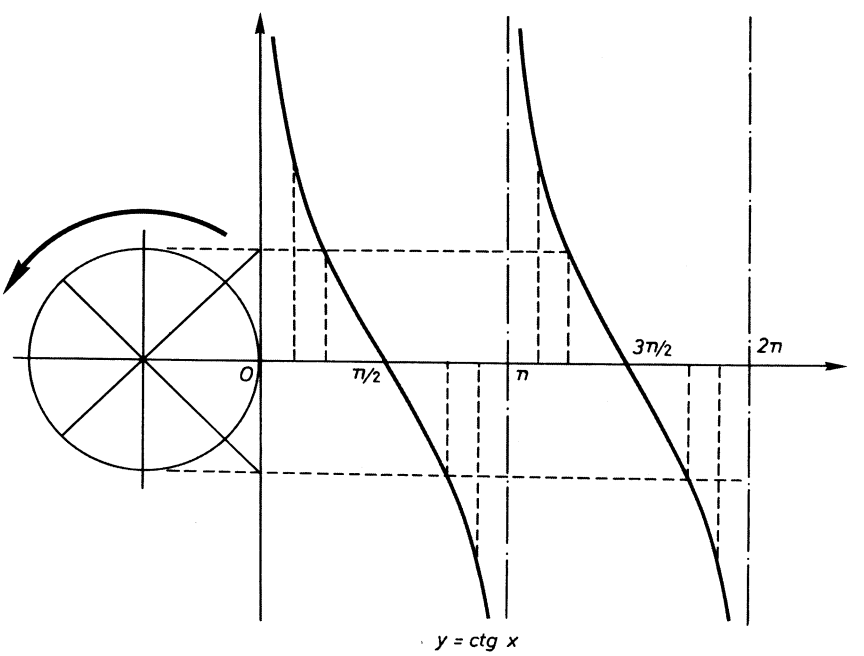


FIG. 2.53.

3. Es periódica, de periodo π, pues

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} (x + k\pi).$$

Ejercicio 85

En un cuadro como el que se facilita, recapitúlese la variación de las funciones goniométricas, indicando los valores más significativos de 0 *a* 2π *radianes.*

x / $f(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sen	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$+1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1
tg	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0	$+1$		-1	0
cosec		2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$+\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	
sec	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2		$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	1
ctg		$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	1	-1		$+1$	1	-1	

FIG. 2.54.

Existen tablas que coleccionan los valores de las razones goniométricas de los ángulos del primer cuadrante, de minuto en minuto *(tablas naturales);* otras hay que tabulan los logaritmos de las razones goniométricas.

7. FUNCIONES INVERSAS DE LAS CIRCULARES CONTINUAS

Ciertamente, las funciones circulares, por no ser unívocas, no admiten función inversa uniforme. Pero extendiendo el formalismo de la función inversa a estos casos, cabe pensar en una f^{-1} multiforme, cuyos pares son los de f, con orden invertido.

La función inversa de la función seno es la simbolizada

$$y = \operatorname{arc\,sen} x,$$

que se lee «y es el arco cuyo seno es x», y su esquema, con algunos de sus valores, es el de la figura 2.55.

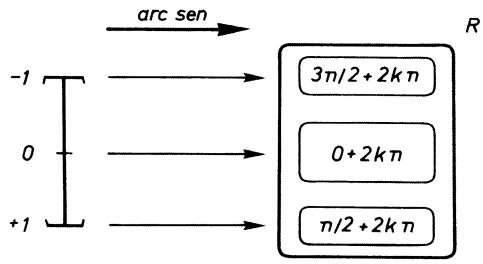


FIG. 2.55.

Para representar la función $y = \text{arc sen } x$, basta trazar la gráfica simétrica a la sinusoide, respecto de la primera bisectriz. Ayudándonos de la figura 2.56, analicemos el tipo de función que es $y = \text{arc sen } x$.

Debido a que la función $y = \text{sen } x$ no es unívoca, su función inversa no es uniforme. La función $y = \text{arc sen } x$ es una *función multiforme,* formada por una infinidad de *ramas.* Sus puntos de ramificación son

$$\left(\pm 1,\ \pm(2k+1)\frac{\pi}{2} \right).$$

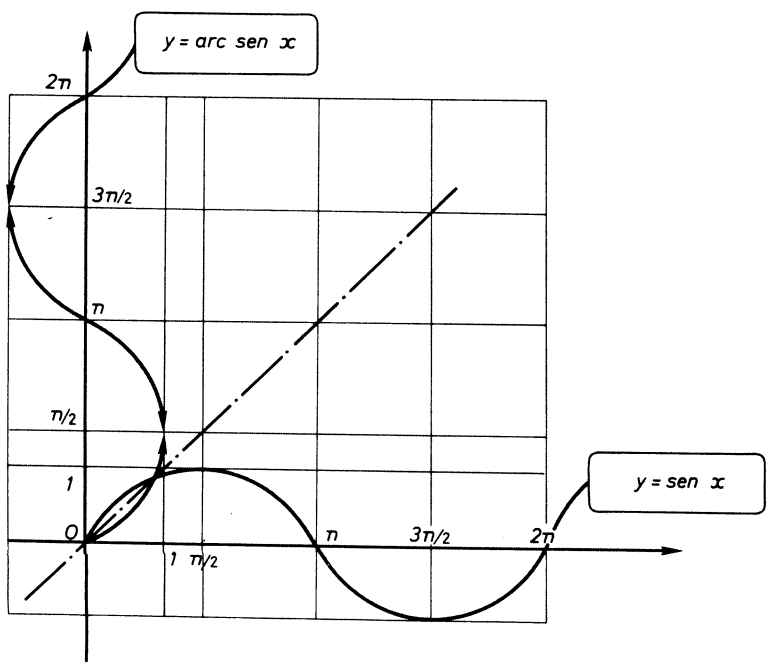


FIG. 2.56.

Ejercicio 86

Determínese el conjunto de imágenes del real $\sqrt{3}/2$, *según la función multiforme* $y = \text{arc sen } x$.

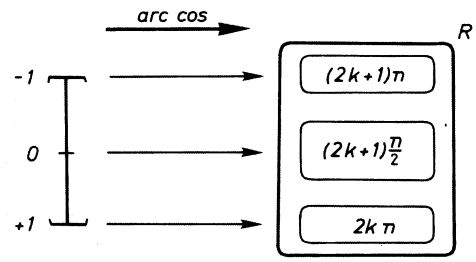


FIG. 2.57.

De la misma manera aparece la función $y = \text{arc cos } x$.

También, no siendo unívoca la función coseno, su función inversa resulta *multiforme*, con infinidad de ramas que, según se aprecia en la figura 2.58, tienen puntos de ramificación del tipo

$$(\pm 1\ ,\ \pm k\pi).$$

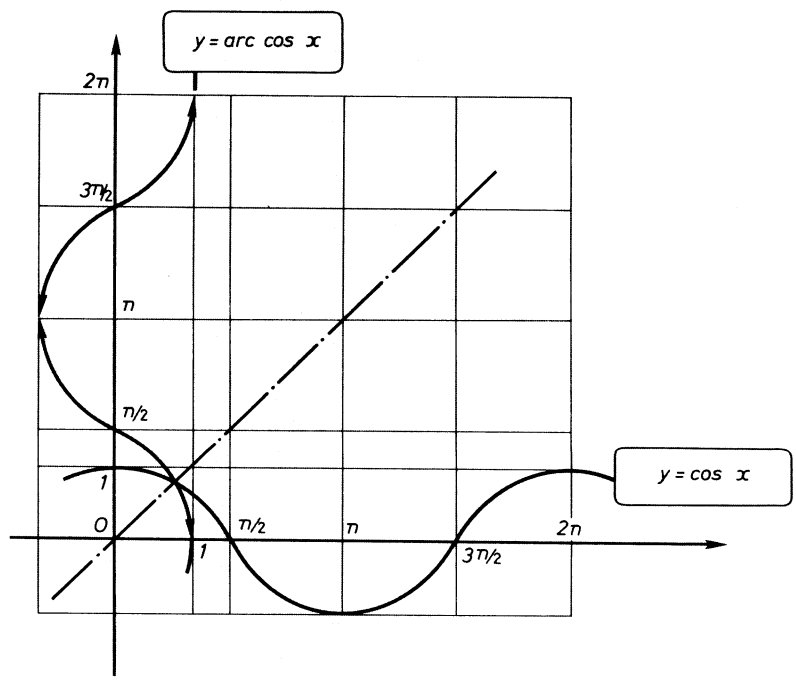


FIG. 2.58.

Ejercicio 87

Establézcase el conjunto de imágenes del real 1/2, *según la función multiforme* $y = \text{arc cos } x$.

8. ECUACIONES GONIOMETRICAS

Teniendo en cuenta que las funciones circulares no son unívocas, a cada imagen le corresponde infinidad de soluciones-antecedente. Por eso, al resolver una ecuación goniométrica, conviene tenerlo presente, a fin de dar TODAS las soluciones de la ecuación propuesta, como se hace en el

Resuélvase la ecuación

$$\text{sen } x = \sqrt{3}/2$$

El menor ángulo con ese seno es 60°; pero otro que tiene el mismo seno es el suplementario, 120°; de modo que

$$\text{sen } x = \sqrt{3}/2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 60 + 360\,k = 60^\circ\,(1 + 6k) \\ x_2 = 120 + 360\,k = 120^\circ\,(1 + 3k) \end{cases}$$

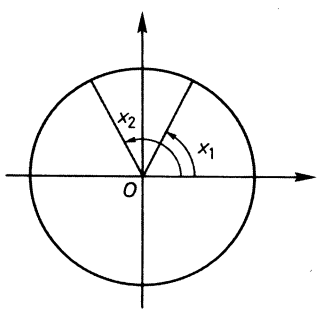


FIG. 2.59.

Ejercicio 88

Resuélvanse las siguientes ecuaciones, dando todas las soluciones:

a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$; *d)* $\text{tg } x = -\text{ctg } \dfrac{\pi}{6}$;

b) $\text{tg } x = \text{tg } \dfrac{\pi}{4}$; *e)* $\text{sen } x = \text{sen } (-x)$;

c) $\text{ctg } x = \text{tg } 60^\circ$; *f)* $\text{sen } x = 1$.

Las funciones goniométricas ciertamente no son inyectivas, pero si se exige la solución de una ecuación en un determinado intervalo, es posible que la función correspondiente en ese intervalo sí sea inyectiva, lo que permite hacer corresponder a igualdad de imágenes igualdad de antecedentes angulares. Tal es el caso del

Ejemplo 38

Resuélvase la ecuación $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ en el intervalo real $[0, \pi]$.

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \iff x-\frac{\pi}{3}=3x+\frac{\pi}{4} \implies x=\frac{-7}{24}\pi \text{ rad.}$$

Ejercicio 89

Consígase la solución en el primer cuadrante del siguiente sistema goniométrico:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \cos A+\operatorname{sen} B=1 \\ \text{II} & A+B=\pi/2 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 90

Resuélvase en $[0, 2\pi]$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B=2\sqrt{3} \\ \text{II} & A=180-B \end{array}\right\}$$

9. TRIGONOMETRIA DEL TRIANGULO RECTANGULO

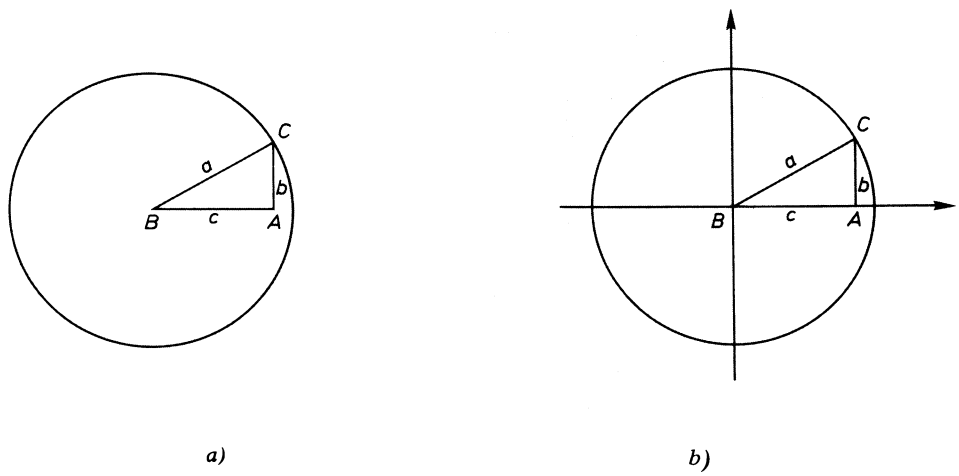
Sobre todo triángulo rectángulo puede construirse una circunferencia con centro en uno de los vértices de sus ángulos agudos y con radio la hipotenusa (figura 2.60 *a*). Basta completar el dibujo para tenerlo todo dispuesto como en una circunferencia goniométrica (figura 2.60 *b*).

Entonces, para un triángulo rectángulo, las razones goniométricas directas toman las ya conocidas formas en cursos anteriores:

$$\operatorname{sen} \widehat{B}=\frac{y}{r}=\frac{b}{a} \iff b=a\cdot\operatorname{sen} \widehat{B} \qquad [1]$$

$$\cos \widehat{B}=\frac{x}{r}=\frac{c}{a} \iff c=a\cdot\cos \widehat{B} \qquad [2]$$

$$\operatorname{tg} \widehat{B}=\frac{y}{x}=\frac{b}{c} \iff b=c\cdot\operatorname{tg} \widehat{B} \qquad [3]$$



a) *b)*

FIG. 2.60.

[1] Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto.

[2] Un cateto es igual a la hipotenusa por el coseno del ángulo contiguo.

[3] Un cateto es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto a él.

Las aplicaciones de tan sencillas fórmulas son constantes en las ciencias y en la técnica.

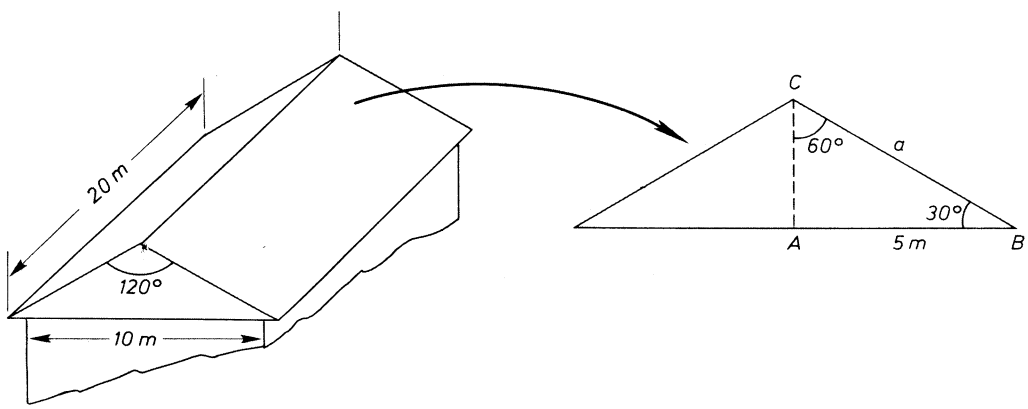


FIG. 2.61.

Ejemplo 39

Se desea cubrir una planta rectangular de 20×10 metros con un tejado de pizarra, a dos aguas iguales, dispuesto longitudinalmente, de modo que la luz de caballete sea 120°. Determínense los metros cuadrados de pizarra que se necesitan.

$$\text{Superficie} = 2 \times 20 \times a$$

$$\cos 30^\circ = \frac{5}{a} \Longrightarrow a = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = 10\sqrt{3}/3 \text{ metros}$$

$$S = 40 \times 10\sqrt{3}/3 \simeq 240 \text{ m}^2$$

Ejercicio 91

Calcúlese la superficie de la cubierta del ejemplo 39, *si se pretende construir a dos aguas distintas de inclinaciones respectivas* 30° *y* 60°.

Ejemplo 40

Determínese la aceleración con que cae un cuerpo de 20 kg de masa, a lo largo de un plano inclinado de 30°, sin considerar el rozamiento.

La fuerza peso se descompone en la normal al plano, N, compensada por la reacción del plano de sustentación, y la tangencial, T, responsable del movimiento. Esta fuerza tangencial viene representada por el cateto PS del triángulo PSQ:

$$T = PQ \cdot \text{sen } Q = m \cdot g \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$T = m \cdot a \;\; ; \;\; m \cdot a = m \cdot g \cdot \text{sen } 30^\circ \;\; ; \;\; a = \frac{1}{2} \cdot g \text{ m} \times \text{s}^{-2}$$

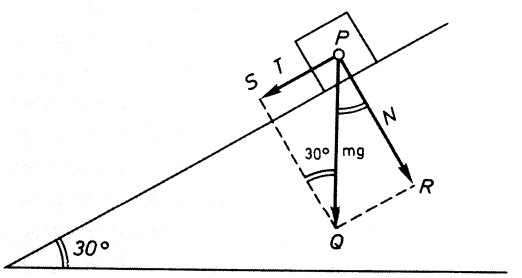


FIG. 2.62.

Ejercicio 92

Determínese la aceleración *con que llega al final de un plano inclinado de longitud* 5 *metros un cuerpo que baja sin rozamiento, desde una altura de* 3 *metros.*

Ejercicio 93

En un puerto de montaña de primera categoría hay una rampa señalizada con la señal de la figura 2.63. *Un coche que baja reteniendo a* 20 *km/h, tarda en llegar abajo quince segundos. Determínese la longitud de la rampa y el desnivel que salva.*

FIG. 2.63.

Ejercicio 94

La parte más alta de la torre de control de un aeropuerto se observa desde un punto que dista 20 *metros de su pie, bajo un ángulo de* 60° (Fig. 2.64). *Determínese la altura de esa torre de control.*

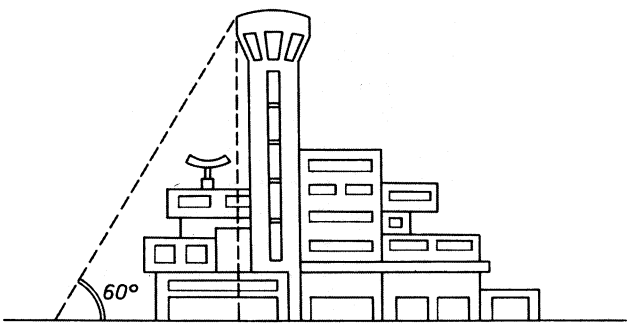


FIG. 2.64.

En las aguas tranquilas de un pantano, un bote con motor *fuera borda* desarrolla una velocidad de 12 km/h. Si se pretende atravesar perpendicularmente una corriente fluvial que discurre con una velocidad de 5 km/h, determínese la velocidad de crucero y la dirección de la trayectoria

Con los vectores velocidades se construye el triángulo BAC de la figura 2.65, en el que se cumple:

$$v = \sqrt{v_b^2 + v_r^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ km/h}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{v_r}{v} = \frac{5}{13} = 0{,}3846 \Longrightarrow \alpha = \text{arc sen } 0{,}3846$$

Según las tablas, la dirección es $\alpha = 22^\circ\, 37'$.

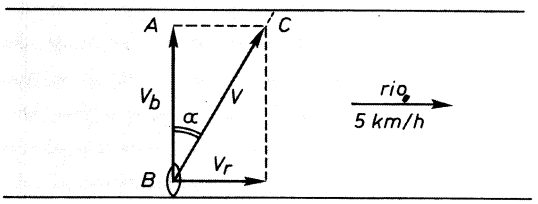


FIG. 2.65.

Ejercicio 95

El velocímetro de una motora marca una velocidad equivalente a 13 *km/h, al atravesar un río que discurre en dirección E-W. La brújula de dirección indica un ángulo de avance de* 30°. *Determínese la velocidad de la corriente que se atraviesa.*

Existe un método muy cómodo de medir alturas a las que no se puede acceder, basado en la trigonometría del triángulo rectángulo. Es el *método de la doble observación* que se desarrolla en el

Determínese la altura del acantilado de la figura 2.66, sabiendo que desde el punto B_1 se ve bajo un ángulo de 45° y que 30 metros más cerca, en el punto B_2, el ángulo de observación es de 60°.

En el triángulo B_1AC:

$$\text{tg } 45° = \frac{h}{30 + x}$$

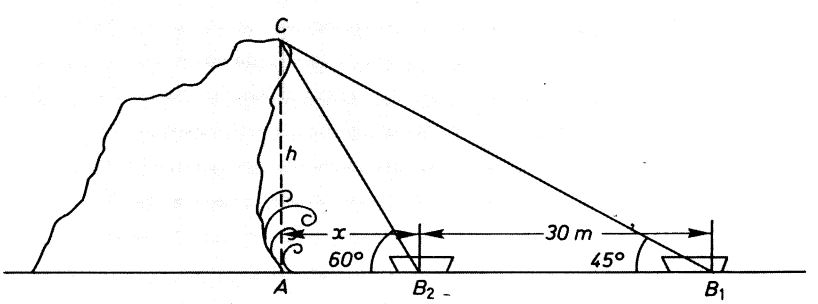


FIG. 2.66.

En el triángulo B_2AC:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{x}$$

Se ha conseguido un elemental sistema de ecuaciones cuya solución da los valores de x y de la altura pedida, h.

$$1 = \frac{h}{30+x} \Longrightarrow 30 + x = h \Longrightarrow x = h - 30$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \Longrightarrow x\sqrt{3} = h \;\; ; \;\; (h-30)\sqrt{3} = h \Longrightarrow h = 45 - 15\sqrt{3} \simeq 19 \text{ metros}$$

Ejercicio 96

La instalación de lanzamiento de un cohete se observa desde B_1 bajo un ángulo de 30°. Avanzando 87 metros, hasta la valla de prohibición, en B_2, la línea de mira tiene una inclinación de 45°. Calcúlese la altura de la instalación.

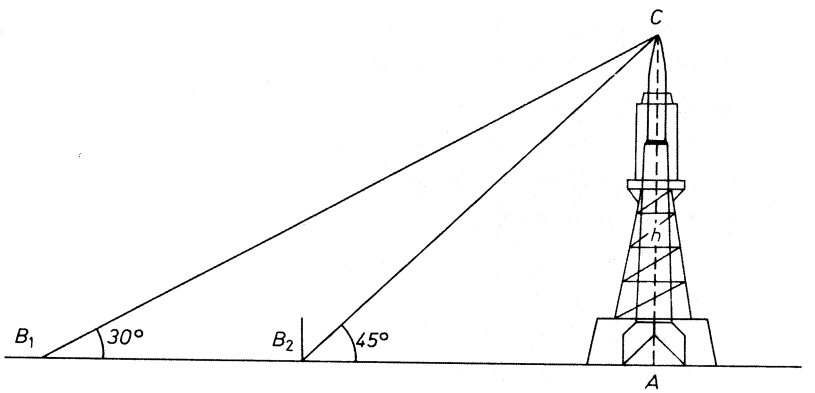


FIG. 2.67.

Ejercicio 97

Un avión en vuelo horizontal de crucero vuela en el plano vertical de dos puntos de observación A y B, distantes entre sí 1 000 metros. Cuando desde A se le ve bajo ángulo de 60°, el avión está pasando sobre la vertical de B. Pasados veinte segundos, se le observa desde A con un ángulo de mira de 30°. Determínense la altura y la velocidad del vuelo.

Terminando la breve introducción a la trigonometría en este curso, dejamos registrados todavía unos cálculos referentes a las alturas de un triángulo oblicuángulo.

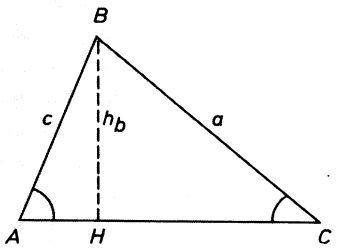


FIG. 2.68.

Sea el triángulo oblicuángulo de la figura 2.68. Al trazar la altura h_b, se obtienen dos triángulos rectángulos en los que se verifica:

$$\text{en } BHC: \quad h_b = a \cdot \operatorname{sen} C \qquad [1]$$

$$\text{en } BHA: \quad h_b = c \cdot \operatorname{sen} A \qquad [2]$$

El área del triángulo ABC es

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b \qquad [3]$$

Sustituyendo [1] en [3], resulta:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} C} \qquad [4]$$

fórmula que dice:

> El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos cualesquiera de sus lados por el seno del ángulo comprendido.

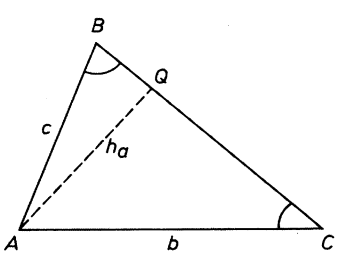


FIG. 2.69.

Al igualar [1] y [2] se obtiene:

$$a \cdot \operatorname{sen} C = c \cdot \operatorname{sen} A \Longrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} . \qquad [5]$$

Si en lugar de trazar la altura h_b, se hubiera trazado la h_a (Fig. 2.69), se hubiera podido escribir:

$$\begin{array}{l} \text{en } AQB: \quad h_a = c \cdot \operatorname{sen} B \\ \text{en } AQC: \quad h_a = b \cdot \operatorname{sen} C \\ \hline c \cdot \operatorname{sen} B = b \cdot \operatorname{sen} C \\ \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \end{array} \qquad [6]$$

Igualando [5] y [6] se consigue:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad [7]$$

expresión que constituye el llamado «teorema de los senos» que se enuncia:

> Los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales a los lados opuestos.

Intentemos buscar la razón de proporcionalidad de [7]. En la figura 2.70 se dibuja el círculo circunscrito al triángulo ABC.

Se traza el triángulo auxiliar $A'BC$ que, por tener un lado diámetro, tiene su ángulo φ recto. En él se puede escribir:

$$\operatorname{sen} A' = \frac{a}{2R}$$

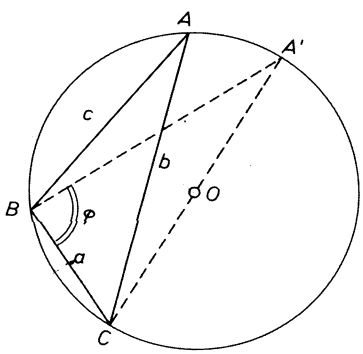


FIG. 2.70.

Pero $\widehat{A}=\widehat{A'}$, por ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco $\widehat{BC}$. Entonces:

$$\operatorname{sen} A=\frac{a}{2R} \Longrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A}=2R. \qquad [8]$$

Comparando [7] y [8], se concluye que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R. \qquad [9]$$

La razón de proporcionalidad encontrada ha sido el diámetro del círculo circunscrito al triángulo.

Finalmente, se consigue otro interesante resultado, si se sustituye la [9] en la fórmula del área [4]. Efectivamente, despejando el $\operatorname{sen} C$ de los dos últimos miembros de [9], resulta:

$$\operatorname{sen} C=\frac{c}{2R}$$

y sustituyendo en [4], queda:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\frac{c}{2R};$$

$$\boxed{S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}} \qquad [10]$$

interesante fórmula del área de un triángulo en función de sus lados y del radio de su círculo circunscrito.

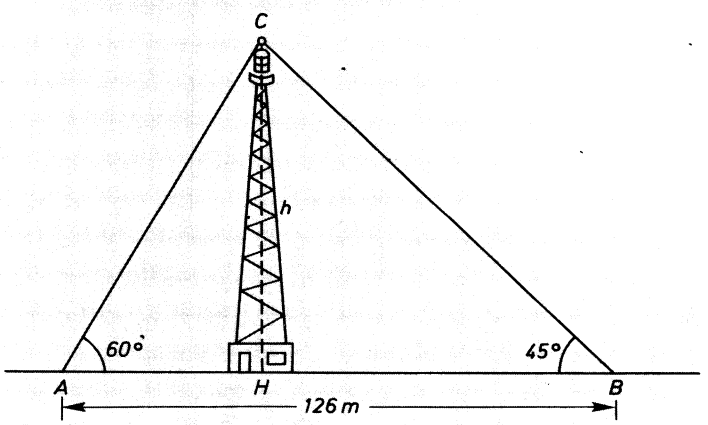


FIG. 2.71.

Ejercicio 98

Una antena de radio está anclada con unos tirantes de cable de acero, según los datos de la figura 2.71. *Determínese:*

a) *la altura de la antena;*
b) *la longitud de los cables de anclaje, supuestos rectos;*
c) *el seno del ángulo en C;*
d) *el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC;*
e) *el área de ese triángulo.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.3

48. $\pi/2$; $\pi/4$; $\pi/12$; $\pi/3$; $5\pi/6$; $3\pi/2$; $2\pi/3$.

49. 180°; 60°; 30°; 108°; 90°; 135°; 15°; 22° 30′.

50. *a)* $x = 1/5(90 - 17) = 14° 36'$;
b) $x = 1/3(90 - (180 - 128° 32' 14'')) = 12° 50' 44''$.

51. $B + C = x + 2/3\, x = \pi/2 \Longrightarrow x = 3\pi/10$; $B = 3\pi/10$ y $C = \pi/5$.

52. $\alpha = 60/2 = 30°$; $\beta = 120°$; $\gamma = \dfrac{60 + 60}{2} = 60°$.

53. φ es ángulo exterior del triángulo isósceles ABC, luego

$$\varphi = 2 \cdot \pi/8 = \pi/4 = 45°.$$

54. 1 radián $= \dfrac{180°}{\pi} = 57° 17' 44''$, aproximadamente.

55.

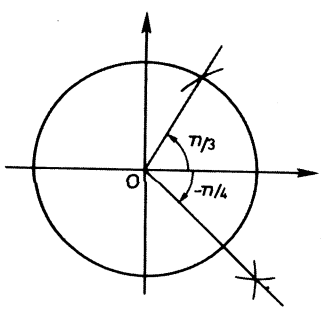


FIG. 2.72.

56. *a)* $\pi/2-(-\pi/4)=3\pi/4$. Se encuentra en el cuadrante II.

b) $7236^\circ=20\times 360^\circ+36^\circ$. Pertenece al cuadrante I.

57. $\operatorname{sen} x=\sqrt{5}/5$; $\cos x=2\sqrt{5}/5$; $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{ctg} x=2$;

$\sec x=\sqrt{5}/2$; $\operatorname{cosec} x=\sqrt{5}$.

58. Véanse los cuadros «matados» de la figura 2.54.

59. De los dos posibles valores, $\operatorname{sen} 5\pi/3=\pm 3/2$, ha de escogerse el negativo, por ser un ángulo del cuadrante III. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

60. Dos soluciones: $0<\alpha<\pi/2$; $\pi<\alpha<3\pi/2$.

61. $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{y^2+x^2}{y^2}=\dfrac{r^2}{y^2}=\left(\dfrac{r}{y}\right)^2=\operatorname{cosec}^2\alpha.$

62. Consúltese el resultado del ejercicio 85.

63. $\operatorname{sen}\alpha=3/5$; $\operatorname{tg}\alpha=-3/4$; $\operatorname{cosec}\alpha=5/3$; $\sec\alpha=-5/4$;

$\operatorname{ctg}\alpha=-4/3$; $\operatorname{tg}\beta=1/t$; $\operatorname{cosec}\beta=+\sqrt{1+t^2}$;

$\operatorname{sen}\beta=1/+\sqrt{1+t^2}$; $\cos\beta=t/+\sqrt{1+t^2}$; $\sec\beta=+\sqrt{1+t^2}/t$.

64. Véase el primer recuadro del punto 6.1. Para el coseno, las mismas cotas. Razón: la suma de dos cuadrados está formada siempre por dos sumandos positivos, luego ninguno de los dos puede ser mayor que la unidad.

65. Ese ángulo no existe, pues supondría tener un seno igual a 5, que es imposible.

66. *a)* $$\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

b) $$\operatorname{tg}^2\alpha/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}:\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}=\operatorname{sen}^2\alpha;$$

c) $$\sec^2\alpha+\cos^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2=$$

$$=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2;$$

d) $$1/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=1:\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha/1=\cos^2\alpha.$$

67.

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{12{,}5 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0{,}64$$

$$\cos 40^\circ = 0{,}8$$

$$\text{tg } 40^\circ = 0{,}8$$

$$\text{cosec } 40^\circ = \frac{31 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 1{,}5$$

$$\sec 40^\circ = \frac{26 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 1{,}3$$

$$\text{ctg } 40^\circ = 1{,}25$$

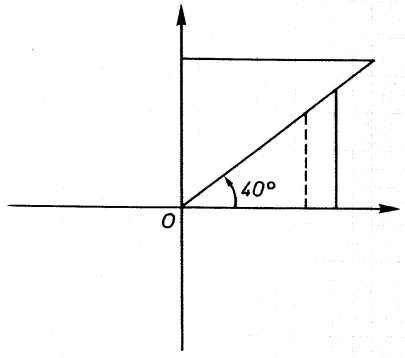


FIG. 2.73.

68. $OBA \sim ODC$; $OBA \sim OEF$; $OBA \sim ODC$.

69.

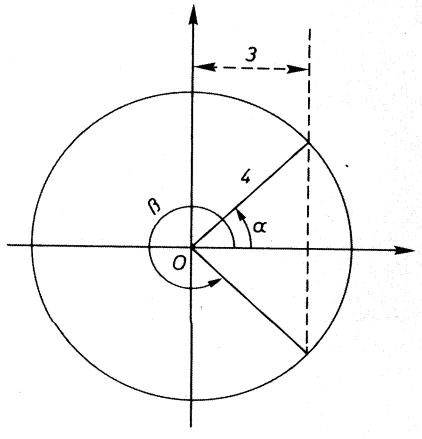


FIG. 2.74.

70.

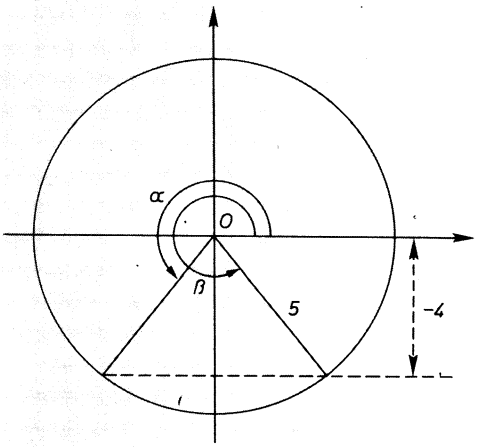


FIG. 2.75.

71.

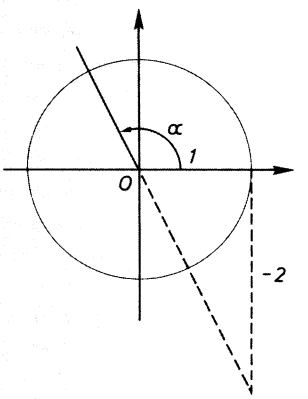


FIG. 2.76.

72. $\operatorname{cosec}\alpha = 1{,}25 = \dfrac{125}{100} = \dfrac{5}{4} \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$

Basta, en la figura 2.75, trazar la paralela p en el semiplano superior.

73. $OA = 1$; $AB = 1/2$; $OB = \sqrt{1 - 1/4} = 3/4$

$\operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$; $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$; $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/2 : \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/3$;

$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$; $\sec 30^\circ = 2\sqrt{3}/3$; $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

74. $OA = 1$; $OB = 1/2$; $AB = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$;

$\operatorname{sen} 60^\circ = \sqrt{3}/2$; $\cos 60^\circ = 1/2$; $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$;

$\operatorname{cosec} 60^\circ = 2\sqrt{3}/3$; $\sec 60^\circ = 2$; $\operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}/3$.

75.

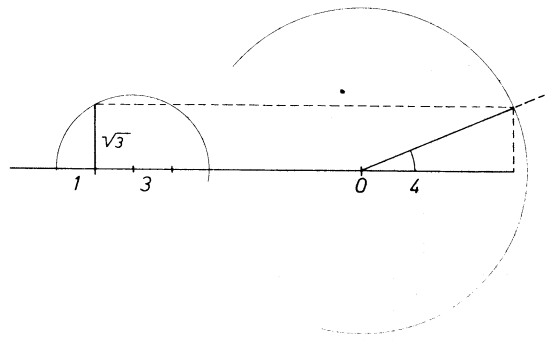


FIG. 2.77

76. $25\pi/4 = 1\ 125^\circ = 360^\circ \times 3 + 45^\circ$; $\pi/4 =$ resto.
Las razones goniométricas de $25\pi/4$ coinciden con las de $\pi/4$.

77. El suplementario de 150° es 30°; por tanto:

$\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$;

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$;

$\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\sqrt{3}/3$;

$\operatorname{cosec} 150^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$;

$\sec 150^\circ = -\sec 30^\circ = -2\sqrt{3}/3$;

$\operatorname{ctg} 150^\circ = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$.

El suplementario de 120° es 60°; por tanto: los senos y cosecantes son iguales y las demás razones, opuestas (contestación al ejercicio 74).

78. $210^\circ - 180 = 30^\circ$. Por tanto, las razones goniométricas de 210° son opuestas a las de 30°, excepto las tangentes y cotangentes que son iguales (contestación al ejercicio 73).

$$5\pi/4 - \pi = \pi/4.$$

Así, pues, las razones goniométricas de $5\pi/4$ son opuestas de las de $\pi/4$, excepto las tangentes y cotangentes que son iguales (véase ejemplo 29).

79. $360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$. Luego las razones goniométricas de 300° son opuestas a las de 60°, excepto los cosenos y secantes que coinciden (contestación al ejercicio 74).

$$2\pi - 7\pi/4 = \pi/4.$$

Entonces, las razones goniométricas de $7\pi/4$ son opuestas a las de $\pi/4$, excepto los cosenos y secantes que son iguales.

80. $\operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen}(180\text{-}105) = \operatorname{sen} 75^\circ = \cos(90\text{-}75) = \cos 15^\circ$;
$\cos 105^\circ = -\cos(180\text{-}105) = -\cos 75^\circ = -\operatorname{sen}(90\text{-}75) = -\operatorname{sen} 15^\circ$;
$\operatorname{tg} 105^\circ = -\operatorname{tg}(180\text{-}105) = -\operatorname{tg} 75^\circ = -\operatorname{ctg}(90\text{-}75) = -\operatorname{ctg} 15^\circ$;
$\operatorname{cosec} 105^\circ = \operatorname{cosec}(180\text{-}105) = \operatorname{cosec} 75^\circ = \sec(90\text{-}75) = \sec 15^\circ$;
$\sec 105^\circ = -\sec(180\text{-}105) = -\sec 75^\circ = -\operatorname{cosec}(90\text{-}75) = -\operatorname{cosec} 15^\circ$;
$\operatorname{ctg} 105^\circ = -\operatorname{ctg}(180\text{-}105) = -\operatorname{ctg} 75^\circ = -\operatorname{tg}(90\text{-}75) = -\operatorname{tg} 15^\circ$.

81. $\operatorname{sen}(-\alpha) = 12/13 \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = -12/13 \Longrightarrow \cos(90-\alpha) = -12/13$;

$$\operatorname{sen}(90-\alpha) = \pm\sqrt{1-144/169} = \pm 5/13.$$

82. En un triángulo,

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \Longrightarrow \beta+\gamma = 180^\circ - \alpha$$
$$\operatorname{sen}(180-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \iff \operatorname{sen}(\beta+\gamma) = \operatorname{sen}\alpha.$$

83. $\operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2(90-B) = \operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$.

84. $B + C = 180 - A$;

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(B+C) = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(180-A) = \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A = 0.$$

85.

$f(x)$ \ x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		-1	0	1		-1	0
cosec		2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	
sec	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2		$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	1
ctg		$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-1		1	0	-1	

FIG. 2.78.

86. $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{3}/2 \Longrightarrow y = \{60+360k\} \cup \{120+360k\}$; $k \in Z$; que también se puede expresar:

$$y = \left\{(1+4k)\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}\right\}.$$

87. $y = \text{arc cos } 1/2 \Longrightarrow y = \{60 + 360k\} \cup \{300 + 360k\}$; $k \in Z$;
o también,

$$y = \left\{ 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right\}.$$

88. *a)* $\cos x = -1/2 \Longrightarrow x = \begin{cases} 120 + 360\,k \\ 240 + 360\,k \end{cases}$;

o también, $x = (2k+1)\pi \pm \pi/3$;

b) $\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \Longrightarrow x = \begin{cases} 45 + 360\,k \\ 225 + 360\,k \end{cases}$;

c) $\text{ctg } x = \text{tg } 60 = \sqrt{3} \Longrightarrow x = \begin{cases} 30 + 360\,k \\ 210 + 360\,k \end{cases}$;

d) $\text{tg } x = -\text{ctg } \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \Longrightarrow x = \begin{cases} 120 + 360\,k \\ 300 + 360\,k \end{cases}$;

e) $\text{sen } x = \text{sen } (-x) \Longrightarrow \text{sen } x = -\text{sen } x \Longrightarrow 2 \text{ sen } x = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = k\pi$;

f) $\text{sen } x = 1$; $x = 90 + 360\,k = 90^\circ(1 + 4k)$.

89. $A + B = \pi/2 \Longrightarrow \text{sen } B = \cos A \Longrightarrow \cos A + \cos A = 1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = 30^\circ \end{cases}$$

90. $A = 180 - B \Longrightarrow \text{tg } B = -\text{tg } A \Longrightarrow \text{tg } A + \text{tg } A = 2\sqrt{3} \Longrightarrow \text{tg } A = \sqrt{3}$

$$A = \begin{cases} 60^\circ \\ 240^\circ \end{cases}; \quad B = \begin{cases} 120^\circ \\ -60^\circ \end{cases}$$

91. Superficie $= 20p + 20q = 20(p + q)$

$$x = p \cdot \cos 60^\circ$$
$$y = q \cdot \cos 30^\circ$$
$$x + y = p \cdot \cos 60^\circ + q \cdot \cos 30^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} 10 = p/2 + \sqrt{3}/2q \\ 100 = p^2 + q^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow p = 5 \text{ m}; \quad q = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$S = 20\,(5 + 5\sqrt{3}) \simeq 273 \text{ m}^2.$$

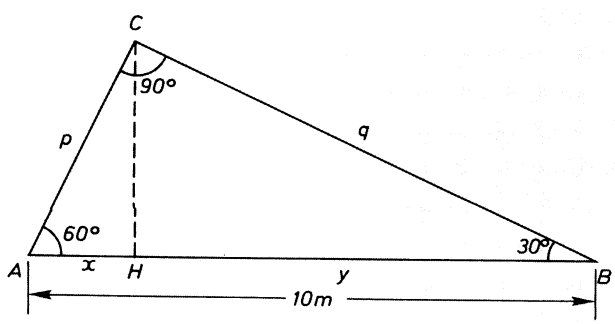


FIG. 2.79.

92. Aceleración $= g \cdot \text{sen}\ \alpha = 3/5\ g\ \text{m} \times \text{s}^{-2}$. Adviértase lo innecesario de algunos datos del problema.

93. $\text{sen}\ \alpha = h/l = 0{,}12 \Longrightarrow l = 83{,}3$ metros ; $h = 10$ metros.

94. $\text{tg}\ 60^\circ = h/20 \Longrightarrow h = 20\sqrt{3}$ metros.

95. $\text{sen}\ 30^\circ = v_r/13 \Longrightarrow v_r = 13 \times \dfrac{1}{2} = 6{,}5$ km/h.

96. $\text{tg}\ 30^\circ = h/(87 + x)$.

$$\text{tg}\ 45^\circ = 1 = \frac{h}{x} \Longrightarrow x = h;$$

$$\text{tg}\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{87 + h} \Longrightarrow h \simeq 118 \text{ metros};$$

97.

$\text{tg}\ 60^\circ = h/1\,000 \Longrightarrow h = 1\,000\sqrt{3}$ metros;

$\text{tg}\ 30^\circ = h/(1\,000 + 20\,v) \Longrightarrow v = 100$ m/s.

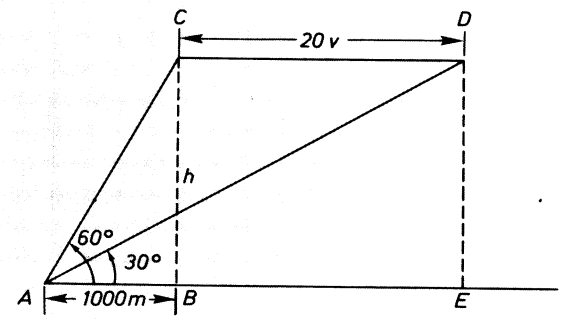


FIG. 2.80.

98. *a)* $\left.\begin{matrix} AH = h/\text{tg}\ 60^\circ \\ HB = h/\text{tg}\ 45^\circ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AH + HB = 126 = h/\text{tg}\ 60^\circ + h/\text{tg}\ 45^\circ \Longrightarrow$

$\Longrightarrow h \simeq 80$ metros;

b) $\text{sen}\ 60^\circ = h/AC \Longrightarrow AC \simeq 92$ metros;
$\text{sen}\ 45^\circ = h/CB \Longrightarrow CB \simeq 113$ metros;

c) $126/\text{sen}\ C = AC/\text{sen}\ 45^\circ \Longrightarrow \text{sen}\ C = \text{sen}\ 75^\circ \simeq 0{,}96$;

d) $S = abc/4R \Longrightarrow R \simeq 97$ metros;

e) $S = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\ A \simeq 3\,343$ m^2.

2.4

Ejercicios y problemas de recapitulación

Función exponencial y logarítmica

1. Exprésense en forma logarítmica las siguientes expresiones exponenciales:

$$5^{-1}=\frac{1}{5} \quad ; \quad \sqrt[3]{27}=3.$$

2. Transfórmense en forma exponencial las siguientes identidades logarítmicas:

$$L_4 8=3/2 \quad ; \quad L_5 \frac{1}{625}=-4.$$

3. Determínese, razonadamente el valor de $\log(ab^2)$, sabiendo que $a=10^x$ y $b=10^y$.

4. Justifíquese si la igualdad $b^{3L_b(x)}=x^3$ es correcta.

5. Determínense con aproximación hasta las milésimas, los logaritmos neperianos de 2 y de 5.

6. Conociendo $\log 2=0{,}301030$, calcúlese $\log 0{,}02$; $\log 400$; $\log 5$; $\log 2{,}5$.

7. Resuélvase la ecuación $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^x=16\,383$.

8. Determínese x en $10^{3-x}=Le$.

9. Hállese la solución de $2^{2x}+2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}+2^{2x-4}-1\,984=0$.

10. Resuélvase la ecuación $4^{x-1}-128=2^{x+2}$.

11. Hállese el valor de x que satisfaga la ecuación

$$3^{x-1}+3^x+3^{x+1}-117=0.$$

12. Calcúlese x en $9^x + 81 = 2 \cdot 3^{x+2}$.

13. Resuélvase la ecuación $2^{x+3} + 2^{2x+2} - 320 = 0$.

14. Hállese la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad 6^x - 15 \cdot 5^{y-1} = -339 \\ &\text{II} \quad 2 \cdot 6^{x+1} + 3 \cdot 5^y = 807 \end{aligned}$$

15. Determínese x en $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 7$.

16. Resuélvase la ecuación $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^x - 2\,047 = 0$.

17. Encuéntrese el valor de x que satisfaga la ecuación $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$.

18. Calcúlese razonadamente el $L_2\, 0{,}0625$.

19. Si $\log A$ en base 9 es k, ¿cuál es el logaritmo en base 9 de $A/81$?

20. Con los datos $\log 2 = 0{,}301030$ y $\log 3 = 0{,}477121$, calcúlese $\log 4{,}050$.

21. Determínese el valor de la fracción a/b, sabiendo que $\log b = \log a + \log 3$.

22. Hállese el $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$, usando sólo $\log 2 = 0{,}301030$.

23. Determínese razonadamente el valor de $L\,(100^{\log e})$.

24. Calcúlese el $\log A$, conociendo $\log 3 = 0{,}477121$, en la expresión

$$A = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}\ldots$$

25. Si el número A se multiplica por 121, su logaritmo en base b aumenta en 2 unidades. Calcúlese justificadamente el valor de b.

26. El punto (32, 2) pertenece a la gráfica de una función logarítmica. Razónese cuál es el valor de la base.

27. Resuélvase la ecuación

$$3 \log x - \log \frac{x}{2} = \log 32.$$

28. Dedúzcase el valor de y en la igualdad

$$L_2 x \cdot L_x(2x) \cdot L_{2x}(y) = 2.$$

29. Resuélvase la ecuación

$$(x^2 - 4x + 7) \log 5 + \log 16 = \log 10\,000.$$

30. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad L_x(y+3) = 1/2 \\ &\text{II} \quad L_y(x-18) = 2 \end{aligned}$$

31. Determínense los valores de x y de y que satisfacen el sistema

$$\text{I} \quad x^2 - y^2 = 10\,000$$
$$\text{II} \quad (x+y)^{\log (x-y)} = 1\,000$$

Funciones circulares

32. Consígase la expresión más simple de

$$(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x + \cos x)^2.$$

33. Simplifíquese la expresión

$$\frac{\operatorname{cosec} A}{1 + \operatorname{ctg}^2 A}.$$

34. Utilizando la relación

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy},$$

determínese el valor de

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}.$$

35. Tomando como dato $\sec^2 x = 2$, calcúlese el valor de

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x}.$$

36. Justifíquese la identidad

$$\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}.$$

37. Razónese la corrección de esta identidad goniométrica:

$$2\cos^2 x - 1 = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}.$$

38. Siendo $a + b = 90^\circ$, determínese cuál de las dos expresiones que se facilitan es la mayor:

$$\cos a + \cos b$$
$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$$

39. Resuélvase en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

40. Del ángulo A de un triángulo se sabe que $\operatorname{sen} A = \frac{1}{2}$. ¿Puede asegurarse que el triángulo es acutángulo en A? Razónese.

41. Despéjese x en la igualdad

$$y = k \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{m}.$$

42. Resuélvase la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x = 7 \cos^2 x - 5.$$

43. Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\text{I} \quad \sec x + \operatorname{cosec} y = 2\sqrt{2}$$
$$\text{II} \quad \cos x + \operatorname{sen} y = \sqrt{2}$$

44. Calcúlense los valores de x que satisfacen la ecuación

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{2}{3}.$$

45. Entre los ángulos de un triángulo ABC se cumple la relación $A = 2B$. Justifíquese que, entonces, se cumple

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} 3B}.$$

46. Calcúlense todas las soluciones del sistema

$$\text{I} \quad 2x + 2y = 180^\circ$$
$$\text{II} \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1$$

47. La resultante de dos fuerzas concurrentes vale 20 newtons, formando con cada una de las iniciales ángulos de 30° y 45°. Determínense las intensidades de las fuerzas compuestas.

48. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 40 metros y su ángulo opuesto, 30°. Calcúlese el área del triángulo.

2.5

Autoevaluación A-2

1. Homomorfismo es

a) una transformación geométrica que conserva la forma;
b) una operación conmutativa en una aplicación biyectiva;
c) una aplicación entre dos conjuntos estructurados que respeta las leyes de composición;
d) una biyección regular.

2. Isomorfismo es

a) un homomorfismo inyectivo;
b) un homomorfismo biyectivo:
c) una aplicación regular;
d) un homomorfismo logarítmico.

3. La imagen isomorfa de la unidad resulta ser cero. Eso es señal de que el isomorfismo establecido

a) es entre una estructura multiplicativa y otra aditiva;
b) no es posible: la imagen del cero ha de ser cero;
c) está definido en un cuerpo;
d) se ha definido, al menos, entre dos anillos.

4. La función exponencial es un isomorfismo

a) en $(R, +, \times)$;
b) entre $(R^+, \times)$ y $(R, +)$;
c) continuo y creciente entre $(R, +)$ y $(R^+, \times)$;
d) continuo entre $(R, +)$ y $(R^+, \times)$.

5. Si se dice correctamente que $y=a^x$ es un isomorfismo continuo y creciente, es porque

a) es una función exponencial;
b) está definido en R;
c) $a<1$;
d) $a \in (1, +\infty)$.

6. Las gráficas de dos funciones exponenciales de bases a y a' son simétricas respecto del eje de ordenadas. Por eso, se puede asegurar que

a) una de ellas es logarítmica;
b) $a=-a'$;
c) $a \cdot a'=1$;
d) han de ser simétricas respecto del eje de abscisas.

7. Si se componen la exponencial $y=a^x$ con la logarítmica de la misma base, se obtiene

a) $y=1$;
b) $y=$constante;
c) $y=x$;
d) depende de la base a.

8. La gráfica de la función logarítmica de base a pasa por el punto

a) $(1, 0)$;
b) $(0, a)$;
c) $(0, 1)$;
d) $(1, a)$.

9. La función logarítmica es decreciente si

a) $a<0$;
b) siempre es creciente;
c) $0<a<1$;
d) $a \in R^-$.

10. La implicación $La=Lb \Longrightarrow a=b$ es correcta porque

a) la función logarítmica es continua;
b) la función logarítmica es inyectiva;
c) se puede simplificar;
d) se trata de la misma base.

11. La igualdad $\log (a \cdot b)=\log a+\log b$ es correcta, porque

a) la función logaritmo es monótona creciente;
b) está definida de R en R;
c) es un isomorfismo entre $(R^+, \times)$ y $(R, +)$;
d) en las exponenciales se suman los exponentes.

12. Sólo uno de los logaritmos decimales que se escriben podría serlo del número 1,374. Márquese.

a) 1,126041;
b) 0,312612;
c) $\bar{1}$,141328;
d) $\bar{2}$,001315.

13. El logaritmo decimal de $-0{,}2$ es

a) $-0{,}301030$;
b) $\bar{0}$,301030;
c) $\bar{1}$,301030;
d) «no tiene sentido».

14. El cologaritmo del número P es a. Por eso se puede asegurar que el $\log P$ vale

a) $-a$;
b) $1/a$;
c) $-1/a$;
d) a^{-1}.

15. El logaritmo de $1/P$ es a. Por eso se dirá que el logaritmo de P es

a) $-a$;
b) $1/a$;
c) $-1/a$;
d) a^{-1}.

16. La expresión $L_b N = x$ es equivalente a

a) $x^b = N$;
b) $N^x = b$;
c) $b^x = N$;
d) $N^b = x$.

17. El logaritmo de 3 en base 1/9 es

a) 2;
b) $-1/2$;
c) $1/2$;
d) -2.

18. El logaritmo de 0,125 en una cierta base es -3. Esa base es

a) -2;
b) 5;
c) 2;
d) $-1/2$.

19. Para conseguir el L_7A, habría de multiplicarse el $\log A$ por

a) $\log 7$;
b) $1/L_7A$;
c) $1/\log 7$;
d) L_7A.

20. La característica del $L_3 82$ es

a) 1;
b) 3;
c) 4;
d) no se puede saber sin tablas.

21. Una de las cuatro gráficas dibujadas representa la función compuesta de la logarítmica y exponencial. Márquela.

a) 1.ª;
b) 2.ª;
c) 3.ª;
d) 4.ª.

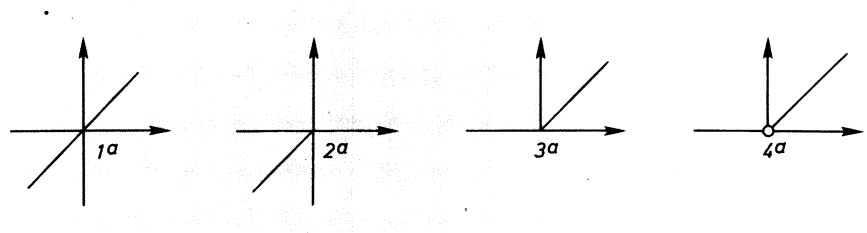


FIG. 2.81.

22. Y si se compone la exponencial y logarítmica, entonces la gráfica de la función producto es

a) 1.ª;
b) 2.ª;
c) 3.ª;
d) 4.ª.

23. La sucesión de signos (+, −, −, +) corresponde a la variación en los cuatro cuadrantes de la función

a) seno y cosecante;
b) coseno y secante;
c) tangente y cotangente;
d) cotangente.

24. La ecuación $\text{sen}^2 x = 3 - \cos^2 x$

a) es imposible;
b) tiene de solución $x = 60 + 360\,k$;
c) se satisface para $x = 30 + 360\,k$;
d) no puede ser en un triángulo rectángulo.

25. Si la $\sec x = 0{,}5$, se puede asegurar que

a) $\cos x = 1/0{,}5$;
b) $\text{sen}\, x = 1/0{,}5$;
c) no tiene sentido el dato;
d) $1 + 0{,}5^2 = \text{tg}^2 x$.

26. Sólo una de las columnas del cuadro es correcta. Márquese.

a) 1.ª;
b) 2.ª;
c) 3.ª;
d) 4.ª.

x \ $f(x)$	sen	cos	tg	ctg
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	1	0

FIG. 2.82.

27. Márquese la única expresión correcta

a) $\text{sen}\,(\pi - x) = -\text{sen}\, x$;
b) $\sec(\pi + x) = \sec x$;
c) $\text{tg}\,(2\pi - x) = -\text{tg}\, x$;
d) $\text{tg}\,(\pi/2 - x) = -\text{tg}\, x$.

28. Las funciones circulares continuas son

a) el seno y la cosecante;
b) el coseno y la secante;
c) todas son discontinuas;
d) el seno y el coseno.

29. Las funciones circulares unívocas son

a) el seno y el coseno;
b) el seno;
c) la tangente;
d) ninguna.

30. El dominio de la función coseno es

a) $(-1, +1)$;
b) $[-1, +1]$;
c) R;
d) R^+.

31. El dominio de la función tangente es

a) $\bigcup_{k\in Z}((2k-1)\pi/2,\ (2k+1)\pi/2)$;

b) $A = R - \left\{(2k \pm 1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

c) $R - k\dfrac{\pi}{2}$;

d) R^+.

32. Solamente utilizando el $\log 2 = 0{,}301030$ es posible calcular el $\log P$. Inténtese

$$P = \frac{0{,}0125 \times \sqrt[4]{80^3}}{3{,}2^3 \times 0{,}64^5}.$$

33. Determínese un número natural que satisfaga la ecuación exponencial

$$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 7.$$

34. Resuélvase la ecuación logarítmica

$$2\log x - \log(x + 16) = 2.$$

35. Hállese la solución del sistema

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad \log_y(x+3) = 1/2 \\ &\text{II} \quad \log_x(y-18) = 2 \end{aligned}$$

36. Justifíquese la identidad goniométrica

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

37. Dibújese un ángulo del tercer cuadrante, cuya secante sea -3.

38. Dibújese un ángulo x tal que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/3.$$

39. Consígase la solución en $[0, \pi/2]$ del sistema

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 1 \\ &\text{II} \quad A + B = \pi/2 \end{aligned}$$

40. Una nube fija se observa desde B_1 bajo un ángulo de 30°. Avanzando 87 metros, en B_2 se ve la nube con una inclinación de 45°. Calcúlese la altura a que se encuentra esa nube.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-2

1. *c).*	**9.** *c).*	**17.** *b).*	**25.** *c).*
2. *b).*	**10.** *b).*	**18.** *c).*	**26.** *b).*
3. *a).*	**11.** *c).*	**19.** *c).*	**27.** *c).*
4. *d).*	**12.** *b).*	**20.** *c).*	**28.** *d).*
5. *d).*	**13.** *d).*	**21.** *d).*	**29.** *d).*
6. *c).*	**14.** *a).*	**22.** *a).*	**30.** *c).*
7. *c).*	**15.** *a).*	**23.** *b).*	**31.** *a).*
8. *a).*	**16.** *c).*	**24.** *a).*	

32. $\log P = -1{,}022122 = \bar{2}{,}977878$.

33. Véase el ejemplo 21.

34. No tiene solución en R^+.

35. $x = 3/2$; $y = 81/4$.

36. Véase solución al ejercicio 66 *d).*

37. Está realizado en el ejemplo 28.

38. Consúltese el ejemplo 30.

39. Véase solución al ejercicio 89.

40. Compruébese con el ejercicio 96.

UNIDAD TEMATICA 3

DERIVACION

3.1. Derivada de una función en un punto

1. *La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta*
2. *Recta tangente en un punto a una curva*
3. *Derivada de una función en un punto*

3.2. Función derivada

1. *Función derivada*
2. *Continuidad y derivación*
3. *Una aplicación lineal llamada derivación*

   3.1. Función derivada de la suma de dos funciones
   3.2. Función derivada del producto de un real por función

4. *Derivadas sucesivas*
5. *Diferencial*
6. *Función derivada de la compuesta de dos funciones*
7. *Derivadas de las funciones inversas*
8. *Derivada y crecimiento*

3.3. Derivación

1. *Función constante. Funciones lineales*
2. *Función potencial*
3. *Funciones polinómicas*
4. *Función logarítmica*
5. *Producto de dos funciones*
6. *Función derivada de* $y = 1/x$

7. *Función derivada del cociente de dos funciones*
8. *Función derivada de la potencial de exponente real*
   - 8.1. Función potencial con exponente entero
   - 8.2. Función potencial con exponente racional; función «raíz»
   - 8.3. Función potencial con exponente irracional
9. *Función derivada de la función exponencial*
10. *Funciones derivadas de las funciones goniométricas*
    - 10.1. Funciones seno
    - 10.2. Funciones coseno
11. *Funciones derivadas de las inversas de las funciones goniométricas*
    - 11.1. Función arco seno
    - 11.2. Función arco coseno
    - 11.3. Función arco tangente
12. *Funciones primitivas*

3.4. Ejercicios y problemas de recapitulación

3.5. Autoevaluación A-3

3.1

Derivada de una función en un punto

1. LA FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACION DE UNA RECTA

Desde el curso pasado es conocido que la gráfica de la función afín

$$y = mx + p \qquad [1]$$

es una recta. Si se desea que la recta pase por el punto $T(a, b)$, o lo que es igual, que la función tenga el par (a,b), ese par ha de satisfacer la expresión [1]:

$$b = ma + p \qquad [2]$$

Al calcular la diferencia de las dos igualdades establecidas, se obtiene

$$y - b = m(x - a)$$

o bien,

$$\boxed{m = \frac{y - b}{x - a}} \qquad [3]$$

La ecuación recuadrada [3] se refiere a

— todas las funciones afines que contienen el par (a, b);
y representa a

— todas las rectas que pasan por el punto (a, b), a excepción de la $x = a$.

Es la ecuación del *haz de rectas* de vértice T, dibujado en la figura 3.1.

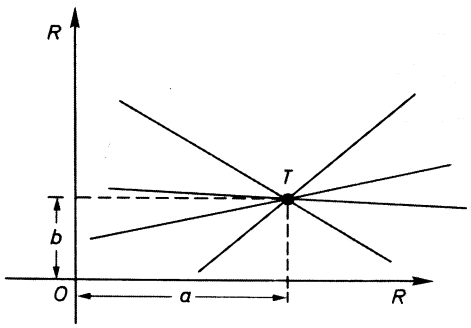


FIG. 3.1.

Ejemplo 1

El haz de rectas cuyo vértice es el punto $T(5, 2)$ tiene de ecuación

$$m = \frac{y-2}{x-5} \Longrightarrow y = mx + (2 - 5m).$$

Ejercicio 1

Establézcase la ecuación del haz de rectas cuyo vértice es el origen.

Ejercicio 2

Hállese el vértice del haz de rectas $y = mx - 3m$.

Observando la figura 3.2, es fácil caer en la cuenta de que para fijar una recta de las infinitas que forman el haz, basta con determinar el ángulo que forma con el eje de abscisas (sentido positivo).

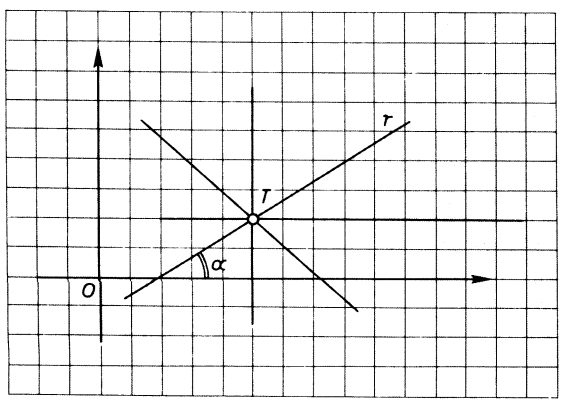


FIG. 3.2.

La recta r del haz de la figura 3.2 tiene de *inclinación* el ángulo α, porque:

> *Inclinación* de una recta es el ángulo que forma el eje de abscisas con la recta, en sentido positivo.

Para fijar la inclinación, se acostumbra a utilizar la tangente trigonométrica del ángulo. Así (obsérvese el dibujo), la *pendiente* de la recta r es $\operatorname{tg}\alpha = 2/3$, porque:

> *Pendiente* de una recta es la tangente trigonométrica de su inclinación.

Sólo queda por saber qué tiene que ver el parámetro m de la ecuación del haz [3] con la pendiente de las rectas. Veamos: se construye la figura 3.3,

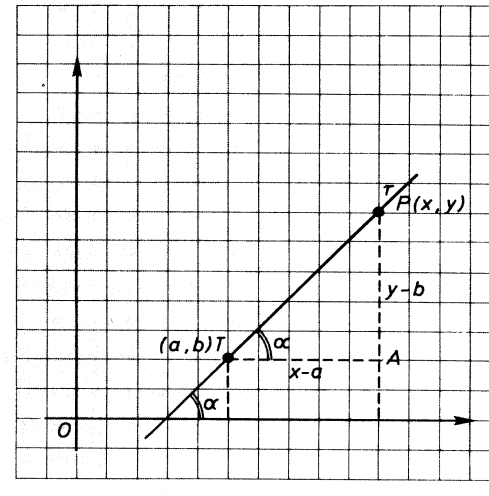


FIG. 3.3.

gráfica del haz de vértice $T(a, b)$ y sobre una de sus rectas r se marca un punto cualquiera $P(x, y)$. La propia figura es suficientemente expresiva para comprender que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AP}{AT} = \frac{y-b}{x-a} \qquad [4]$$

Comparando las expresiones [3] y [4], la conclusión es clara:

$$\text{tg } \alpha = \frac{y-b}{x-a} = m$$

El parámetro m ha resultado ser, precisamente, la pendiente de la recta r.

Ejercicio 3

Establézcase la ecuación de la recta r del ejemplo 1.

Ejercicio 4

Calcúlense las ecuaciones de las rectas r, cuyos datos se facilitan:

a) $m = 1/2$; $A(3, 1) \in r$;
b) $m = -2$; $B(-1, 0) \in r$;
c) inclinación $= \pi/4$; $C(3, 1) \in r$;
d) $\alpha = 135°$; $D(2, -1) \in r$.

2. RECTA TANGENTE EN UN PUNTO A UNA CURVA

La primera definición que los niños aprenden para la tangencia es:

«Tangente a una curva es la recta que le toca en uno solo de sus puntos.»

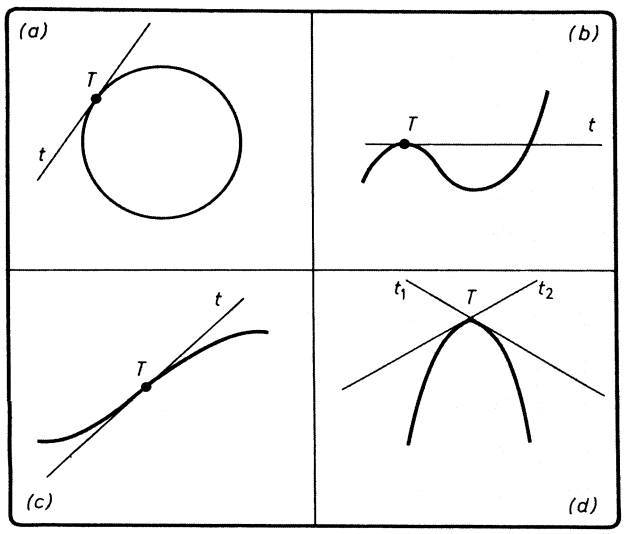


FIG. 3.4.

Las curvas de la figura 3.4 la muestra como insuficiente. Ahí se dibujan cuatro tangencias y sólo la (*a*) se ajusta a la frase infantil.

Entonces, ¿qué es tangente a una curva en uno de sus puntos? Como se acaba de ver, la recta-tangente quedará fijada cuando se hayan determinado

— un punto de ella y
— su pendiente.

El punto es dato del enunciado, de modo que lo que queda por investigar es el valor de la pendiente de esa recta-tangente. Para ello, considérese el haz de secantes a la curva $y=f(x)$ en el punto $T(a, f(a))$, representado en la figura 3.5.

La abscisa del segundo punto de corte de cada una de las secantes será la abscisa de T aumentada en un número que denotamos Δx, y leeremos «incremento de x». Así sucede con la secante s_1, que corta a la curva en los puntos

$$T(a, f(a)) \quad \text{y} \quad B((a+\Delta x), f(a+\Delta x))$$

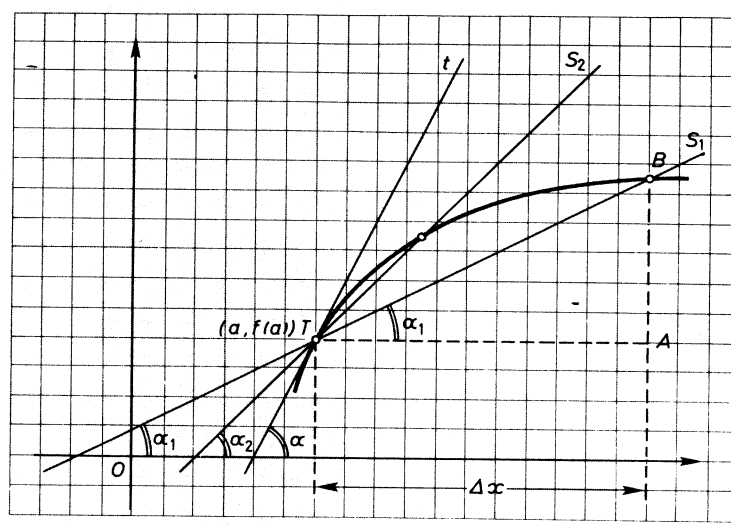


FIG. 3.5.

A medida que va disminuyendo Δx, el segundo punto de corte B se va acercando al A; las inclinaciones de las secantes α_1, α_2, ... se aproximan al valor α. Tal situación sugiere para la pendiente de la recta-tangente a una curva en su punto $(a, f(a))$ esta definición matemática:

$$\operatorname{tg} x = m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \qquad [5]$$

que se lee:

> La pendiente de la recta-tangente a la curva $y=f(x)$ en su punto $(a, f(a))$ es —si existe— el límite de las pendientes del haz de secantes a la curva en ese punto.

Ejemplo 3

Sea la curva representativa de la función $y=x^2+3$. Las pendientes de algunas de las secantes del haz de vértice $T(2, f(2))=(2, 7)$ son:

$$a=2 \;;\; \text{para } \Delta x = 2 : m_1=\frac{(2+2)^2+3-(2^2+3)}{2}=12$$

$$\Delta x = 1 : m_2=\frac{(2+1)^2+3-(2^2+3)}{1}=5$$

$$\Delta x = \tfrac{1}{2} : m_3=\frac{(2+\frac{1}{2})^2+3-(2^2+3)}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Delta x \to 0 : \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2+\Delta x)^2+3-7}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{4+\Delta^2 x+4\Delta x-4}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x+4)=4$$

La pendiente de la tangente en $T(2,7)$ es $m_t=4$. Si se quiere establecer su ecuación, basta usar la expresión [3]:

$$4=\frac{y-7}{x-2} \iff \boxed{t \equiv y=4x-1}$$

Ejercicio 5

Complétese la tabla de valores de las pendientes del haz de secantes a la curva $y=x^2$ en el punto T de abscisa 1. *Calcúlese también la pendiente de la tangente a la curva en ese punto T.*

a	Δx	$m_s = \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$
1	1	$m_1 = 3$
1	$\frac{1}{2}$	$m_2 = \frac{5}{2}$
1	$\to 0$	$m_t = 2$
1	-1	$m_4 = 1$

Ejercicio 6

Calcúlese la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - \dfrac{1}{3}x$, *en el punto de abscisa* $a = 3$.

Ejercicio 7

Usando la ecuación [3], *establézcase la de la recta-tangente del ejercicio anterior.*

Tras el estudio realizado de las pendientes, ya es posible contestar con propiedad a la pregunta que quedó pendiente al principio de este epígrafe: ¿qué es recta tangente a una curva en uno de sus puntos?

> La recta t es tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $T(a, f(a))$ si
>
> — $(a, f(a)) \in t$
>
> — $m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

3. DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Establecida una función $y = f(x)$, se llama *derivada de f en el punto* $(a, f(a))$ al número

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \qquad [6]$$

Entiéndase que ese límite no tiene por qué existir siempre. Cuando existe, se dice que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto $(a, f(a))$.

Es probable que se haya caído en la cuenta de que la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de su recta-tangente en ese punto. En efecto, así es; por eso, también se suele definir:

> Recta-tangente a una curva en uno de sus puntos es aquella que contiene al punto y tiene por pendiente el valor de la derivada de la función en ese punto.

Ejercicio 8

Calcúlense los valores de las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y=\sqrt{x-2}$ para $x=3$;

b) $y=x^2+1$ para $x=0$;

c) $s=2+3t+\frac{3}{2}t^2$ para $t=2$ (en lugar de m, úsese la letra v para el valor de esta derivada);

d) $y=2x-4$ para $x=1/2$ y también para $x=3$;

e) $y=3$ para uno cualquiera de sus puntos.

Existe otro modo de expresar el valor de la derivada de una función en un punto.

Sobre la figura 3.6 resulta claro que $\Delta x=x-a$. Entonces, sustituyendo

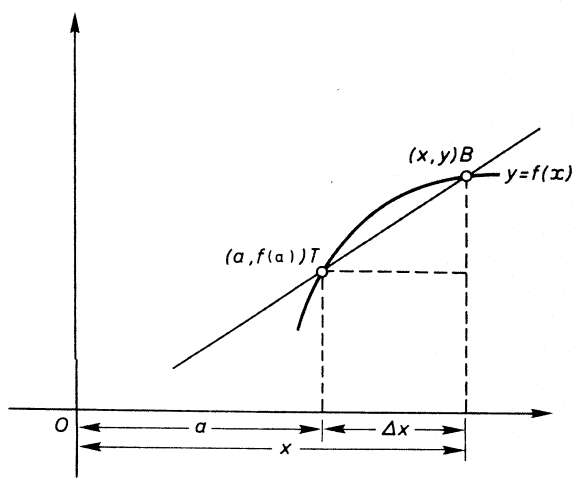


FIG. 3.6.

esa igualdad en la expresión de la derivada, escrita en [6], resulta:

$$m = \lim_{(x-a)\to 0} \frac{f(a+x-a)-f(a)}{x-a}$$

$$\boxed{m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad [6']$$

Utilizando la fórmula [6'], el valor para $x=1$ de la derivada de la función $y=x^3-2x$ se calcula así:

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x-(1-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x-1) = 1.$$

Ejercicio 9

Usando el método del ejemplo 4, *calcúlense los valores de las derivadas de las funciones que se indican en los puntos que se establecen:*

a) $y=x^2+x-1$ *para el punto de abscisa* $x=-1$;

b) $y=x^3+2x$ *para el punto de abscisa* $x=0$;

c) $y=(x-2)^2$ *para el punto de abscisa* $x=-1$.

Obsérvese la figura 3.7. Se entiende por recta normal a una curva en uno de sus puntos la perpendicular a la tangente en el punto considerado

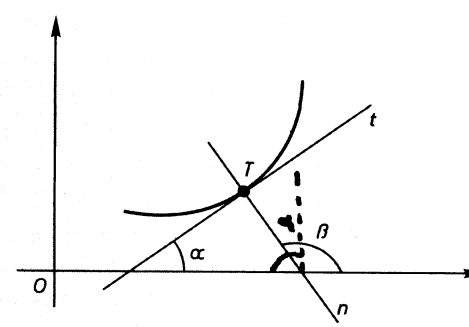


FIG. 3.7.

Su pendiente es $m_n = \text{tg}\,\beta$. Pero $\beta = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$.

Recordando la proposición VI que aparecía en el párrafo 4 del capítulo 2.3, se escribe:

$$m_n = \text{tg}\,\beta = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

La relación escrita permite conocer, entonces, la pendiente de la recta normal a una curva en uno de sus puntos, con lo que se puede escribir inmediatamente la ecuación de esa recta normal.

Ejercicio 10

Calcúlense las pendientes y las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la curva $y = x^4 + x$, *en el punto de abscisa* $x = -1$.

Ejercicio 11

Determínese el punto de la función $y = x^2 - 3x + 2$ *en el que su derivada es nula. Interprétese este resultado desde el punto de vista de la tangente geométrica a la curva en ese punto.*

Sugerencia: *Utilícese la fórmula* [6] *para el cálculo de la derivada.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.1

1. $m = \dfrac{y-0}{x-3} \Longrightarrow y = mx.$

2. $y = mx - 3m \Longrightarrow y = m(x-3) \Longrightarrow m = \dfrac{y-0}{x-0}$. Centro $(3, 0)$.

3. $m = 2/3 \quad ; \quad \dfrac{2}{3} = \dfrac{y-2}{x-5} \quad ; \quad y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}.$

4. *a)* $1/2 = \dfrac{y-1}{x-3}$;

b) $y = -2x - 2$;

c) $y = x - 2$;

d) $y = -x + 1.$

5. $m_1 = 3 \quad ; \quad m_2 = 5/2 \quad ; \quad m_t = 2 \quad ; \quad m_4 = 1.$

6. $m = 17/3.$

7. $17/3 = \dfrac{y-8}{x-3}.$

8. *a)* $m_3 = 1/2$;
b) $m_0 = 0$;
c) $v_2 = 9$;
d) $m_{1/2} = 2,\ m_3 = 2$;
e) $m = 0,\ \forall\, x \in R.$

9. *a)* $m_{-1} = -1$; *b)* $m_0 = 2$; *c)* $m_{-1} = -6.$

10. $m_t = -3$; $m_n = 1/3$; $t \equiv -3 = \dfrac{y-0}{x+1}$; $n \equiv 1/3 = \dfrac{y-0}{x+1}$.

11. $$m_a = 0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 - 3(a+\Delta x) + 2 - (a^2 - 3a + 2)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2a - 3) = 0 \Longrightarrow 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3/2.$$

En ese punto, la tangente, al tener de pendiente cero, es paralela al eje de abscisas.

3.2

Función derivada

1. FUNCION DERIVADA

En el capítulo anterior se ha establecido un número llamado derivada de una función en un punto. Al fin y al cabo, se trataba del cálculo de un límite. También se vio que ese límite-derivada coincidía con el valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de la función considerada, en el punto en cuestión.

Este capítulo pretende definir, para cada función derivable, otra función llamada *función derivada,* que produzca los valores del límite-derivada, para cada valor de la variable x.

Este logro de la Matemática es uno de los mayores servicios al hombre, que intenta *medir* y *conocer* el Universo. Se trata, ¡nada menos!, que de un instrumento para determinar medidas «instantáneas». Cuando un fenómeno *se ha producido,* el hombre sólo puede registrar el resultado; si está *a punto de producirse,* cabe nada más la posibilidad de registrar las condiciones iniciales de arranque. ¿Y durante la evolución?, ¿cómo se puede medir el cambio «sobre la marcha»?

Esta poderosa herramienta matemática es capaz de «sorprender» a los fenómenos en plena evolución. La Física, Química, Biología, Economía, Sociología, ..., y tantas otras ramas del saber o del hacer, quedarían considerablemente mermadas sin ese sencillo y potente instrumento matemático que es el *Cálculo diferencial.*

Bien merece la pena «hacerse técnico» en su manejo, porque —ya se ha dicho— el trabajo que supone su dominio se ve compensado con creces en cualquier tipo de estudio científico o quehacer técnico que luego se emprenda.

Sea la función $y = x^2 - 2x$, cuya gráfica se dibuja en la figura 3.8:

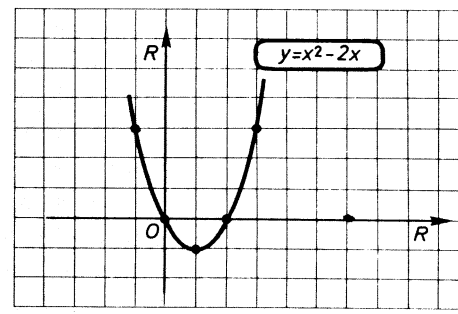


FIG. 3.8.

Se calculan los valores-derivada en alguno de sus puntos usando la expresión [6] del capítulo anterior:

$$\text{en } x = -2 \qquad m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - 2(-2+\Delta x) - (4+4)}{\Delta x} = -6$$

$$\text{en } x = -1 \qquad m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1+\Delta x)^2 - 2(-1+\Delta x) - (1+1)}{\Delta x} = -4$$

$$\text{en } x = 0 \qquad m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 x - 2\Delta x - 0}{\Delta x} = -2$$

Ejercicio 12

Continúese desarrollando el ejemplo 6, calculando el valor de la derivada para $x = 1$ y $x = 2$.

Si en lugar de calcular el valor de la derivada para un original determinado, -2, -1, 0, etc., se trabaja con un punto genérico x, el límite toma la forma funcional

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - (x^2 - 2x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + \Delta^2 x + 2x \cdot \Delta x - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x - 2)$$

$$y' = 2x - 2$$

Obsérvese que el límite existe $\forall x \in R$, de modo que esta función es derivable en todo R.

Ejercicio 13

Calcúlense los valores que toma esa función y' para $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$ y $x=2$. Compruébese que coinciden con los valores del límite-derivada calculado en esos puntos. Quiere decirse, entonces, que se ha conseguido una función que produce los valores de la derivada para cada punto de la función primitiva.

Tras las concreciones anteriores, conviene realizar la formulación general del concepto.

> Sea $y=f(x)$ una función derivable. Se denomina función derivada de la dada, otra, denotada $y'=f'(x)$ y también Df, cuyo criterio es
>
> $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Si se comprende que el numerador de la expresión del límite no es más que lo que varía la función cuando lo hace la variable en un Δx, puede escribirse:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esta expresión para la función derivada, más concisa, se traduce en una frase definitoria, clásica también por su concisión:

> La función derivada de otra derivable es la función que hace corresponder a cada x el límite del cociente incremental, cuando $\Delta x \to 0$.

Ejercicio 14

Calcúlense las funciones derivadas de las que se proponen:

a) $y=x^2$; *b)* $y=x^3$; *c)* $y=3x^2$; *d)* $y=x^2+1$.

Ejemplo 2

La función $y = x^2 - 6x + 8$ tiene de gráfica la parábola de la figura 3.9. Su función derivada es

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 8 - (x^2 - 6x + 8)}{\Delta x} = 2x - 6.$$

La gráfica de esta función lineal, $y' = 2x - 6$, es la recta dibujada en la figura.

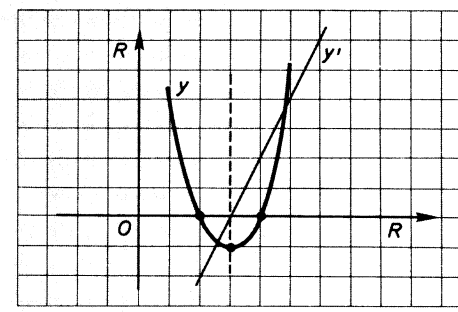


FIG. 3.9.

Ejercicio 15

Dibújense las gráficas de la función $y = -x^2 + 4$ *y la de su función derivada.*

Ejemplo 3

La figura 3.10 presenta la gráfica de una función *rectilínea a trozos.*

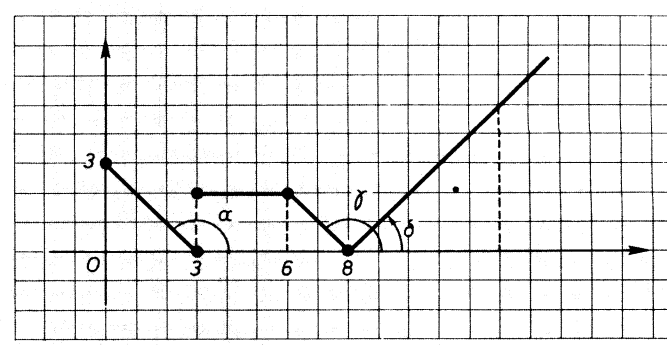
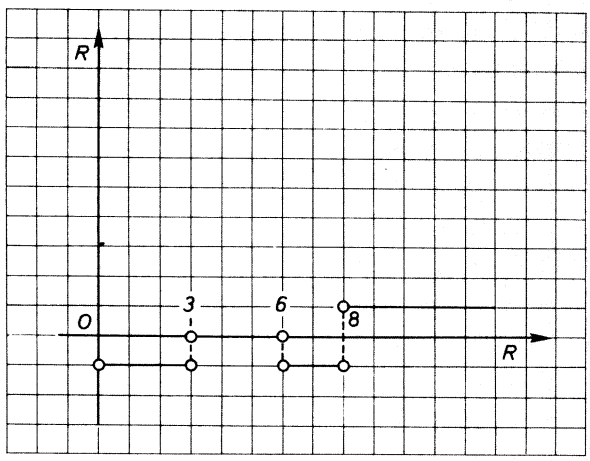


FIG. 3.10.

Si se intenta representar la gráfica de su función derivada, habrá de tenerse en cuenta que cada uno de los *trozos* «son» funciones afines que tienen *constante la pendiente* en cada uno de sus puntos:

$$\operatorname{tg}\alpha = -1 \qquad \operatorname{tg}\gamma = -1$$
$$\operatorname{tg}\beta = 0 \qquad \operatorname{tg}\delta = 1$$

Entonces, la gráfica de la función derivada será la función *escalonada,* dibujada en la figura 3.11.



●——● intervalo cerrado
○——○ intervalo abierto
●——○ intervalo semiabierto

FIG. 3.11.

Ejercicio 16

Dibújese la gráfica de la función derivada de la que se representa en la figura 3.12.

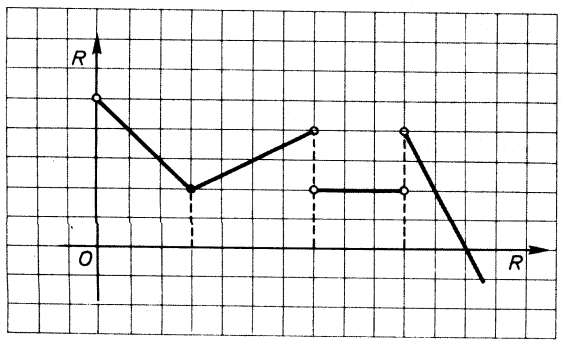


FIG. 3.12.

Ejercicio 17

En la figura 3.13 se dibuja la gráfica de la función derivada de una continua que pasa por el punto $(-3, 0)$. Represéntese la gráfica de esa función continua.

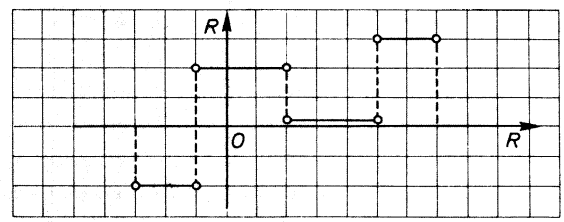


FIG. 3.13.

Ejercicio 18

Establézcase la gráfica de la función derivada de $y = |x|$.

Ejercicio 19

Trácese la gráfica de la función continua cuya derivada es $y' = [x]$ (parte entera de x), sabiendo que pasa por el punto (0, 1/2).

2. CONTINUIDAD Y DERIVACION

Hasta ahora, venimos condicionando todos nuestros establecimientos de derivación de una función con el calificativo *derivable.*

Entendemos por *función derivable*

— en un punto a: si existe $f'(a)$;
— en un intervalo abierto (m, n): si existe $f'(x)$, $\forall x \in (m, n)$;
— en general: si $\exists f'(x)$, $\forall x \in$ dominio.

Resulta sencillo encontrar funciones que, siendo continuas en un punto, sin embargo no son derivables en ese punto. Tal es el caso de la representada en la figura 3.14, en la cual la función continua en a no es derivable en ese punto.

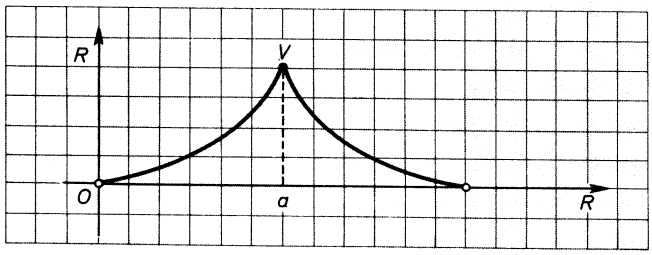


FIG. 3.14.

No obstante, lo que resultaría imposible sería encontrar una función derivable en un punto que no fuera continua en él, porque

> TEOREMA. Es condición necesaria, aunque no suficiente, para que una función sea derivable en a que sea continua en ese punto.

O, si se prefiere otra formulación,

> Toda función derivable en a es continua en a, no siendo cierta la proposición recíproca.

En efecto:

Hipótesis: $y=f(x)$ es derivable en $x=a$. O lo que es igual, existe

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \qquad [1]$$

Tesis: $y=f(x)$ es continua en $x=a$. Es decir:

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(a+x)-f(a)]=0 \qquad [2]$$

Demostración: La única forma de que el límite $f'(a)$ exista es que, al tender a cero el denominador Δx, lo haga simultáneamente el numerador de la expresión [1], ya que, en caso contrario, aparecería un numerador que no tiende a cero, mientras que sí lo hace el denominador, lo que implicaría la no existencia de límite. Entonces se concluye: es necesario que se cumpla [2] —continuidad— para que exista [1] —derivación—. El ejemplo 8 y el ejercicio 16 prueban la no suficiencia.

3. UNA APLICACION LINEAL LLAMADA DERIVACION

Para alcanzar la expresión analítica de la *linealidad* de la derivación, se cubrirán dos etapas: primero se analizará la aplicación-derivación sobre el grupo aditivo de las funciones derivables y, luego, se estudiará el comportamiento de la derivación frente al producto de una función derivable por un número real.

3.1. Función derivada de la suma de dos funciones

Obsérvese la figura 3.15. En ella se simboliza que la aplicación-derivación es un homomorfismo del grupo aditivo de las funciones derivables en el de las funciones continuas.

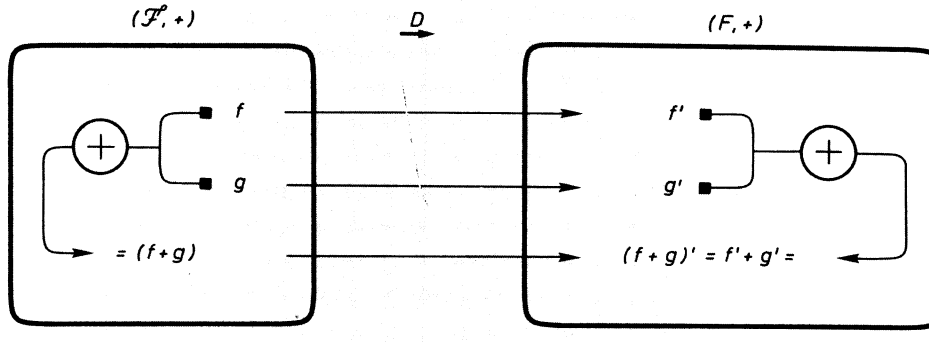


FIG. 3.15.

lo que significa que la función derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones-sumando:

$$\boxed{(f+g)'=f'+g'} \qquad [3]$$

Ejercicio 20

Determínense las funciones derivadas de las $y=x+2$ *y* $z=x^2-1$, *y súmense. Por otro lado, súmense las funciones propuestas y calcúlese la derivada de la función resultante. Compruébense idénticos resultados.*

La justificación general de este homomorfismo aditivo es sencilla:

$$D(f+g)[x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)[x+\Delta x] - (f+g)[x]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= Df(x) + Dg(x)$$

Queda justificada —en otra notación— la igualdad recuadrada en [3].

3.2. Función derivada del producto de un real por una función

La figura 3.16 pretende expresar gráficamente que la derivada del producto de un real por una función derivable es igual al producto del número real por la derivada de la función. O sea:

$$\boxed{(k \cdot f)' = k \cdot f'} \qquad [4]$$

(4)

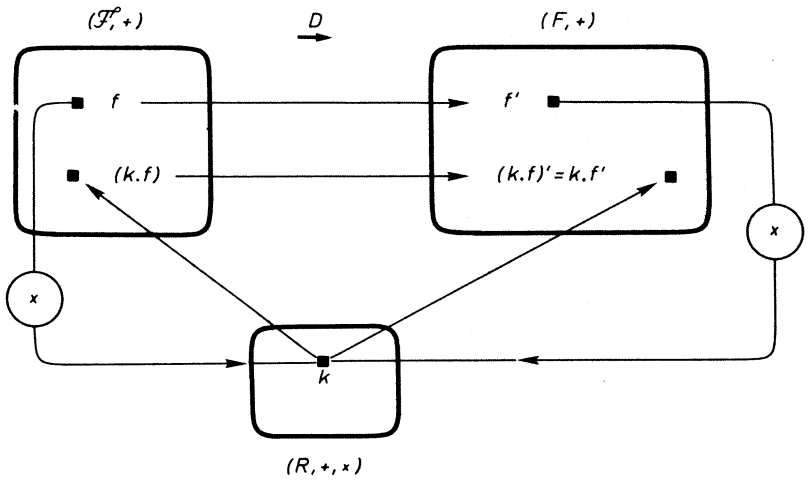


FIG. 3.16.

Efectivamente, si $f \in \mathcal{F}$, entonces también la función $k \cdot f$ pertenece a $\mathcal{F}$, ya que

$$D(k \cdot f)[x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(k \cdot f)(x + \Delta x) - (k \cdot f)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} =$$

$$= k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= k \cdot Df(x)$$

Resulta así justificada —en otra notación— la igualdad recuadrada en [4].

Ejercicio 21

Compruébese lo que se acaba de demostrar, derivando $y = x^2 - 1$; multiplicando la función derivada conseguida por el real 1/2; estableciendo la función $z = \frac{1}{2} y$, y, finalmente, comprobando que $\frac{1}{2} y' = z'$.

Las igualdades [3] y [4] pueden resumirse en una sola expresión. Véase:

$$f, g \in \mathcal{F}; \qquad h, k \in R$$

$$\left.\begin{array}{l} (h \cdot f)' = h \cdot f' \\ (k \cdot g)' = k \cdot g' \end{array}\right\} +$$

$$(h \cdot f)' + (k \cdot g)' = h \cdot f' + k \cdot g' \Longrightarrow \boxed{(hf + kg)' = h \cdot f' + k \cdot g'} \qquad [5]$$

La igualdad [5] es la expresión analítica de la *linealidad de la derivación.*

Ejercicio 22

Utilizando la propiedad de que la aplicación-derivación es una aplicación lineal, calcúlese la derivada de

$$y = 2(x - 3) + \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

4. DERIVADAS SUCESIVAS

Ha quedado dicho que la derivación es una aplicación del conjunto de las funciones derivables sobre el de las continuas.

Ejercicio 23

Compruébense las funciones derivadas que aparecen en la figura 3.17.

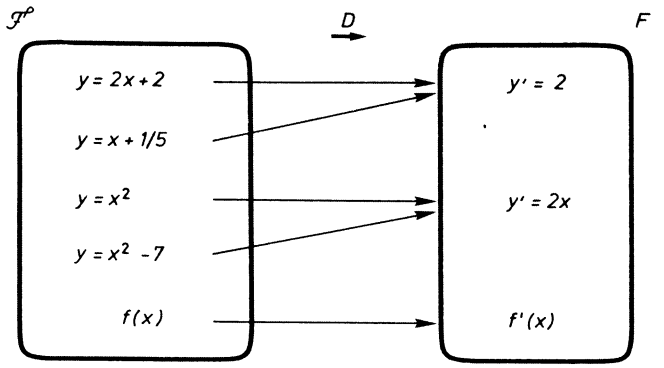


FIG. 3.17.

Ejercicio 24

Obsérvese atentamente la figura 3.17, recapacítese sobre la comprobación realizada en el ejercicio anterior y dígase si la aplicación-derivación,

$$(\mathcal{F}, +) \xrightarrow{D} (F, +)$$

es un homomorfismo inyectivo.

Se puede pensar en que la aplicación-derivación actúe sobre las funciones derivadas, que son derivables. Así, se obtendrían las funciones derivadas de las funciones derivadas. Es la llamada *derivada segunda.* No existe razón alguna para no hacer el mismo planteamiento sobre las derivadas segundas, con lo que se obtienen las *derivadas terceras.* En fin, si son n las veces que actúa la aplicación-derivación, se alcanza la *derivada n-sima.*

$$f(x) \xrightarrow{D} f'(x) \xrightarrow{D} f''(x) \ \ldots \xrightarrow{D} \ \ldots \ f^{(n)}(x) \xrightarrow{D} \ \ldots$$

Las derivadas sucesivas de la función derivable $y = x^3 - 12x$ son

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - 12(x+\Delta x) - (x^3 - 12x)}{\Delta x} = 3x^2 - 12$$

$$y'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 12 - (3x^2 - 12)}{\Delta x} = 6x$$

$$y''' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(x+\Delta x) - 6x}{\Delta x} = 6$$

$$y'''' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6-6}{\Delta x} = ?$$

La función constante $y''' = 6$ viene representada por la recta de la figura 3.18. El valor de su derivada en todos y cada uno de sus puntos es igual a $\text{tg}\, 0 = 0$. Así, pues, y'''' es la función constante $y = 0$. A partir de ella, indefinidamente, todas son nulas.

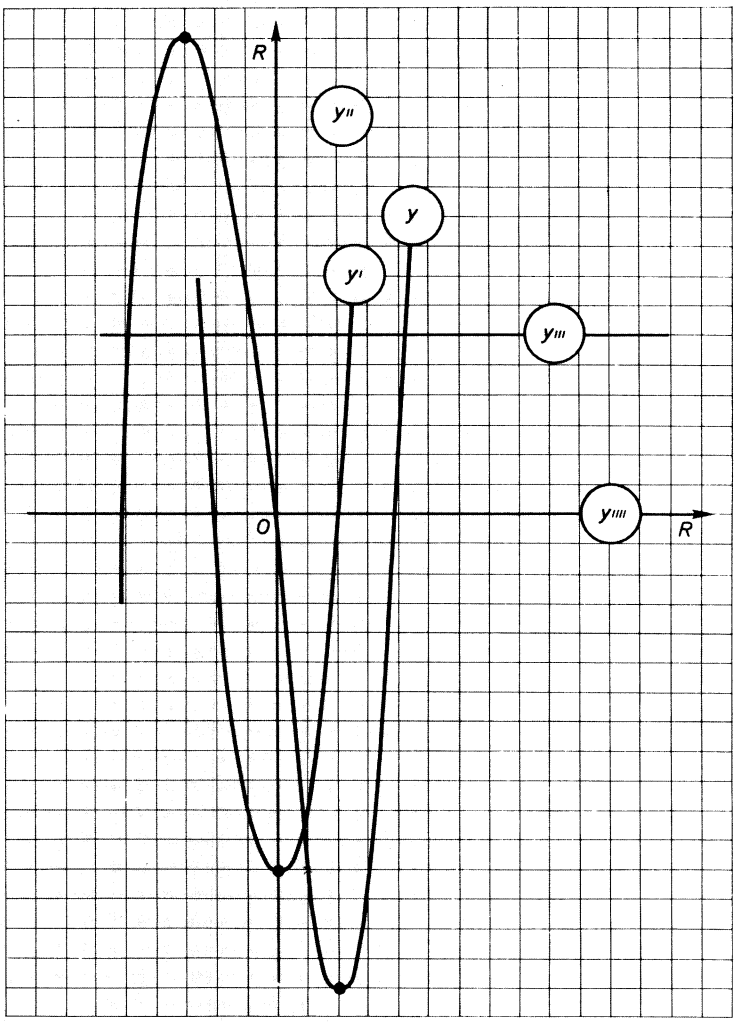


FIG. 3.18.

Ejercicio 25

Como es sabido, la función velocidad es la derivada de la función espacio, y la función aceleración lo es de la función velocidad.

Determínese si el movimiento

$$s = t^2 - \frac{1}{2}t$$

es o no uniformemente acelerado.

Ejercicio 26

Calcúlense la velocidad y aceleración del anterior movimiento en el instante $t = 2$ segundos. (Espacio en metros.)

Ejercicio 27

Hállese en qué momento cambia de sentido el móvil que obedece a la ecuación de movimiento

$$s = t^2 - 2t.$$

Ejercicio 28

Analícese si el móvil cuya ecuación de movimiento es

$$s = \frac{1}{2}t^2 + t$$

va frenando o aumentando su velocidad.

5. DIFERENCIAL

Se ha establecido que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto a, en el que es derivable, es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Cabe considerar la recta por el origen que tiene la misma pendiente

$$y = f'(a)x$$

y que corresponde a una función denominada *diferencial de f en el punto a.*

> La diferencial de una función f en un punto a, en el que es derivable, es la función lineal de R en R
>
> $$x \longrightarrow f'(a)x$$

En notación clásica se escribe $dy = f'(a)\,dx$, que es acorde con la notación de Leibnitz de expresión de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(a)$$

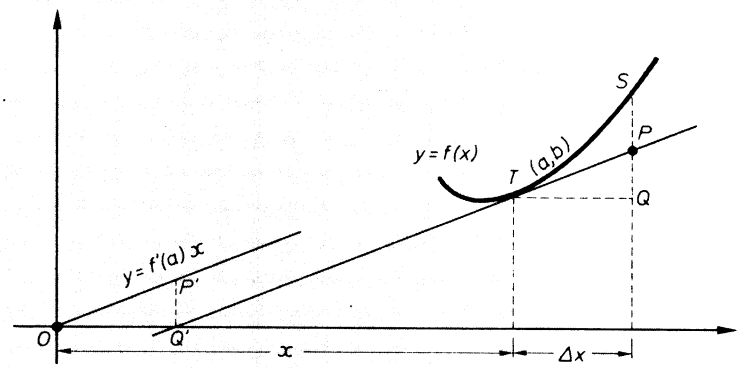


FIG. 3.19.

En la figura 3.19 se pone de manifiesto una interpretación gráfica de la diferencial: la diferencial de una función en un punto x representa la función que da la variación de la ordenada de la tangente en x.

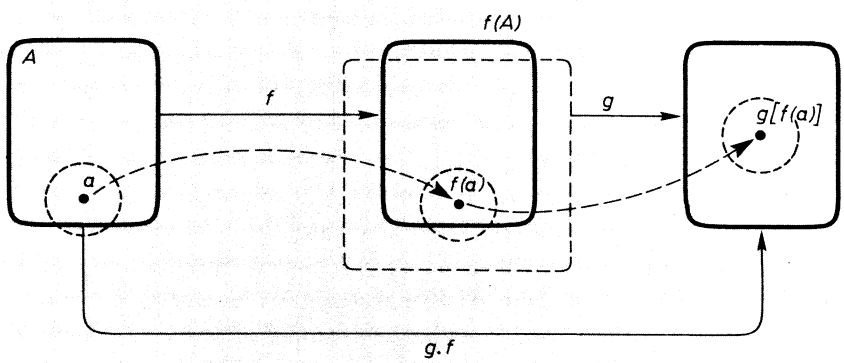


FIG. 3.20.

6. FUNCION DERIVADA DE LA COMPUESTA DE DOS FUNCIONES

Sean las funciones continuas, derivables y con posibilidad de composición que se representan en la figura 3.20.

Por comodidad de notación, en este desarrollo lo que venimos denotando Δx lo escribiremos h.

Se pretende hallar la función derivada de la función compuesta $z=g[f(x)]$, en el punto a, es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}.$$

Si se define

$$k(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

esta función tiene sentido, salvo para $h=0$. Pero se puede definir también para $h=0$, estableciendo

$$k(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

pues el límite existe, al ser f derivable en a *.

Se tiene, entonces:

$$f(a+h)-f(a)=h\cdot k(h)$$

o sea

$$f(a+h)=f(a)+h\cdot k(h);$$

y sustituyendo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a)+h\cdot k(h))-g(f(a))}{h\cdot k(h)}\cdot k(h).$$

Supuesto que $k(h)$ no se anule en intervalo que contenga a $h=0$, existe el límite de la fracción, que resulta ser $g'(f(a))$, mientras que el límite de $k(h)$, cuando $h\to 0$, es $f'(a)$, resultando como derivada de la función compuesta

$$\boxed{g'(f(a))\cdot f'(a)}$$

La regla conseguida es fácilmente extensible a la composición triple y múltiple.

---

* Si $k(h)=0$, para ciertos valores de $h\neq 0$ sigue siendo cierta la expresión de la derivada; pero la demostración de este hecho queda fuera de los límites de este libro.

Ejemplo 10

Sean las funciones $y=u^2$ y $u=2x+1$

$$y'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{(u+\Delta u)^2-u^2}{\Delta u}=2u$$

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)+1-(2x+1)}{\Delta x}=2$$

$$y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)=2u\cdot 2=2(2x+1)\cdot 2=8x+4$$

Hagamos ahora, previamente, la composición de las dos funciones dadas:

$$y=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$$

y calculemos su derivada:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)+1-(4x^2+4x+1)}{\Delta x}=8x+4.$$

Ejercicio 29

Calcúlese la función derivada de la compuesta por $y=2u+1$ *y* $u=x^2$.

Ejemplo 11

Utilizando la derivada de la función compuesta, también llamada «derivada de la función de función», calcúlese la derivada de

$$y=\sqrt{x^2-2}.$$

La función dada puede considerarse función compuesta de $y=\sqrt{u}$ y $u=x^2-2$, por tanto:

$$y'(x)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sqrt{u+\Delta u}-\sqrt{u}}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-2-(x^2-2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{u+\Delta u-u}{\Delta u\cdot(\sqrt{u+\Delta u}+\sqrt{u})}\cdot 2x=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

Ejercicio 30

Siguiendo la técnica del ejemplo 11, calcúlese la derivada de la función $y=\sqrt[3]{2x}$.

Ejercicio 31

El espacio recorrido por un cierto móvil es función de una magnitud energética según la ecuación

$$s = w^2 - 2w.$$

Esa magnitud w es, a su vez, función del tiempo según

$$w = 2t - 1.$$

Determínese la velocidad del móvil en el instante $t = 3$ *segundos.*

7. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Sean las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$ inversas mutuamente. Ello significa que su composición ha de producir la función idéntica. O sea:

$$\begin{array}{c} y = f(u) \\ u = g(x) \\ \hline y = f[g(x)] = x \\ y = x \end{array}$$

Admítase que $y = f(u)$ es derivable en u, y que su recíproca g lo es en $f(u)$. Entonces, usando la función derivada de las funciones compuestas antes establecida, se puede escribir:

$$\left.\begin{array}{r} y = x \xrightarrow{D} y' = 1 \\ y = f[g(x)] \xrightarrow{D} y' = f'(u) \cdot g'(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(u)}} \qquad [6]$$

La regla obtenida dice que la función derivada de la recíproca de otra es la inversa de la derivada de ésta.

Este resultado se muestra muy eficaz, pues con frecuencia el cálculo de la función derivada de una dada resulta engorroso y difícil, siendo así que se puede calcular la de su inversa, que resultaría sencillo y corto.

Ejemplo 12

Calcular la derivada de la función $y = \sqrt[3]{x}$ puede hacerse directamente, pero también se puede conseguir usando su función inversa de este modo:

$$y = \sqrt[3]{x} \Longrightarrow y^3 = x$$

$$x' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(y + \Delta y)^3 - y^3}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{y^3 + 3y^2\Delta y + 3y\Delta^2 y + \Delta^3 y - y^3}{\Delta y} = 3y^2$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Ejercicio 32

En el próximo capítulo se justificará que la función derivada de la exponencial $y=e^x$ *es ella misma, es decir:* $y'=e^x$. *Con este dato, determínese la función derivada de* $y=Lx$.

Ejercicio 33

Cuando llegue el momento se justificará que la función derivada de $y=\text{sen } x$ *es* $y=\cos x$. *Utilizando esta indicación, establézcase la función derivada de*

$$y=\text{arc sen } x.$$

8. DERIVADA Y CRECIMIENTO

Llegar a conocer si una función derivable es creciente o decreciente en un punto o en un intervalo es cuestión que interesa mucho en multitud de situaciones científicas y técnicas.

En un determinado proceso termoquímico es necesario añadir ácido sulfúrico al reactor en el momento en que la actividad catalítica τ comienza a descender. La actividad del catalizador se estima función de la temperatura en el intervalo 200 °C-1 000 °C, según la ley

$$\tau=\frac{8}{3}\theta-\frac{1}{450}\theta^2.$$

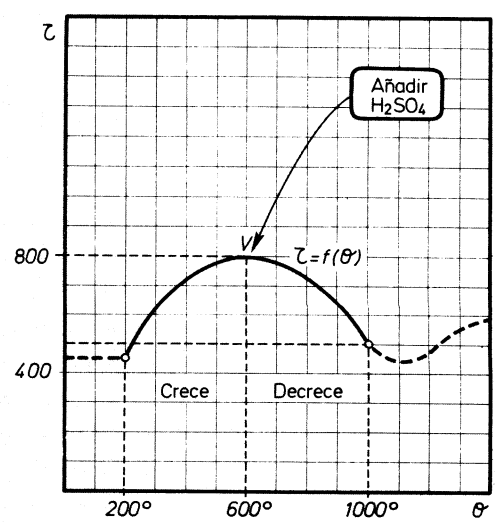


FIG. 3.21.

Representada la función $\tau = f(\theta)$, se obtiene la curva de la figura 3.21. La gráfica muestra que hasta V la función es creciente, ya que a un incremento positivo de la temperatura corresponde un incremento positivo de la actividad catalítica:

$$\Delta\theta > 0 \implies \Delta\tau > 0.$$

En ese intervalo, entonces, se cumple que

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} > 0$$

y también que

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta\theta} > 0,$$

que no es más que la derivada de la función en ese intervalo:

$$\tau' = \frac{8}{3} - \frac{1}{225}\theta$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{225}\theta > 0 \implies \frac{8}{3} > \frac{1}{225}\theta \implies \theta < 600\ ^\circ\text{C}$$

Hasta que el termómetro del reactor no marque 600 °C no es necesario añadir el ácido.

Ejercicio 34

Un móvil se traslada según la ecuación

$$s = t^2 - \frac{2}{3}t + 1.$$

Determínese la ecuación de su velocidad y dígase en qué momento cambia de sentido, o sea, cuál es el instante en que la velocidad pasa de positiva a negativa o, si se prefiere otra formulación, en qué tiempo la función espacio pasa de decreciente a creciente.

La teoría matemática que liga el crecimiento de una función con su derivada queda claramente sugerida en los anteriores ejemplo y ejercicio.

En los intervalos de crecimiento, a un incremento de la variable le corresponde uno de la función del mismo signo y, por tanto, el cociente incremental es positivo, lo que implica una derivada positiva en cada uno de los puntos de ese intervalo.

En los intervalos de decrecimiento, a un incremento de la variable le corresponde uno de la función de distinto signo; el cociente incremental resulta así negativo, y también la función derivada en cada uno de sus puntos.

La figura 3.22 resume esta teoría.

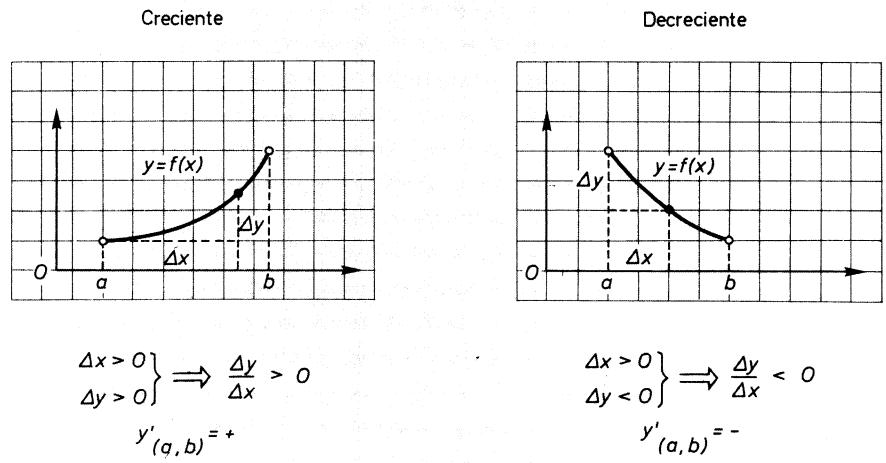


FIG. 3.22.

Ejercicio 35

La función derivable $y=f(x)$ es creciente en un intervalo (a, b). Dígase a qué intervalo angular pertenecen las inclinaciones de sus tangentes en todos los puntos de ese intervalo. Razónese.

Ejercicio 36

Se sabe que en el intervalo (a, b) la función derivable $y=f(x)$ tiene todas sus tangentes con inclinaciones pertenecientes al intervalo $(\pi/2, \pi)$. Estabézcase justificadamente si $y=f(x)$ es creciente o decreciente en (a, b).

La función representada en la figura 3.23 es continua y derivable en (a, b). Su función derivada también es continua en ese intervalo. Siendo así que en $(a, c]$ ha de ser negativa por ser decreciente $y=f(x)$, y positiva en $[a, b)$ por ser creciente $y=f(x)$; necesariamente $y'=f'(x)$ ha de tomar un valor nulo en un punto.

Efectivamente, la tangente en T es la recta paralela al eje de abscisas, su inclinación es cero y, consecuentemente, tiene de pendiente $\operatorname{tg} 0=0$.

> Si en un intervalo de derivabilidad hay puntos en los que cambia el crecimiento, en ellos la función derivada toma el valor 0.

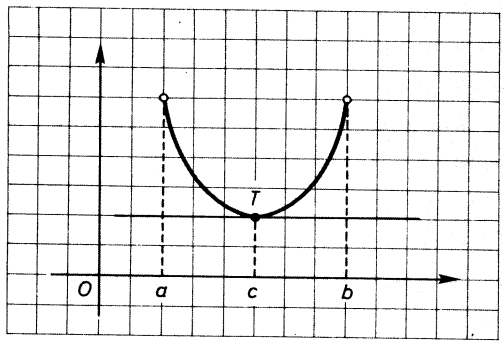


FIG. 3.23.

Ejercicio 37

Determínense los puntos en los que la función

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+12x$$

no es creciente ni decreciente.

Ejercicio 38

Establézcanse los intervalos de crecimiento de la función $y=x^2-3x+4$.

Ejercicio 39

Calcúlese en qué tiempos el móvil de ecuación cinética $s=t^2-t+1$ *«marcha hacia adelante» y en cuáles «va hacia atrás».*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.2

12. En $x=1$, $m_1=0$; en $x=2$, $m_2=2$.

13. $y'(-2)=-6$; $y'(-1)=-4$; $y'(0)=-2$; $y'(1)=0$; $y'(2)=2$.

14. *a)* $y'=2x$; *b)* $y=3x^2$; *c)* $y'=6x$; *d)* $y'=2x$.

15.

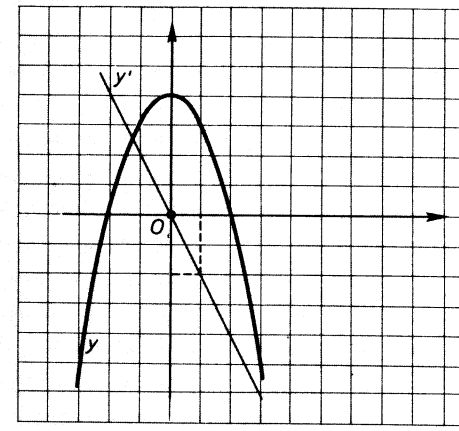


FIG. 3.24.

16.

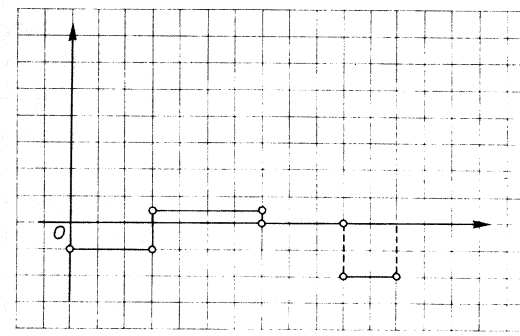


FIG. 3.25.

17.

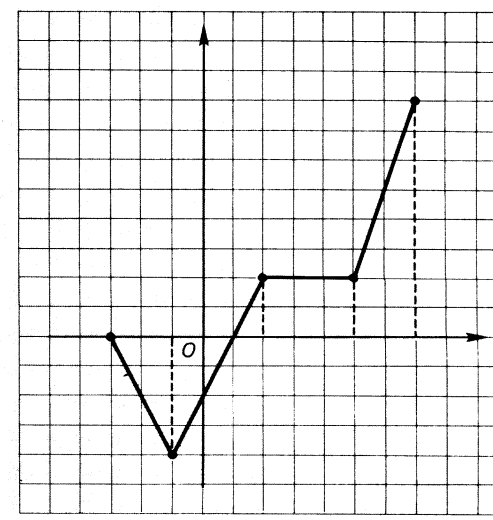


FIG. 3.26.

18.

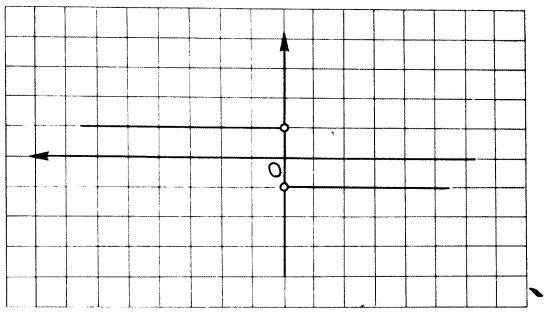


FIG. 3.27.

19.

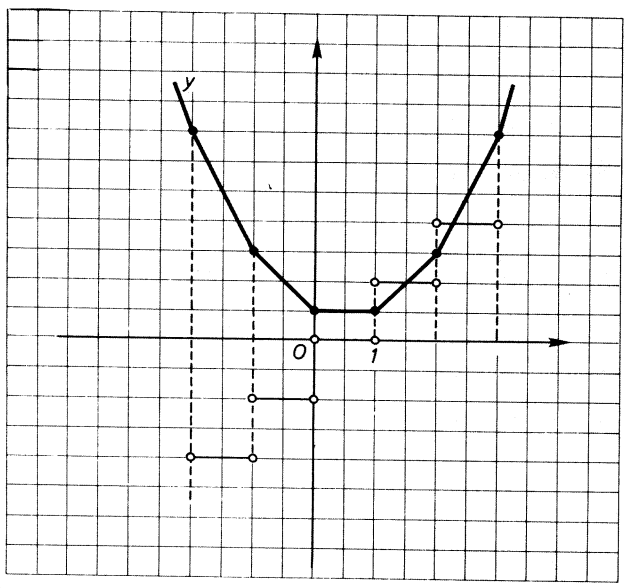


FIG. 3.28.

20. $\left.\begin{matrix} y'=1 \\ z'=2x \end{matrix}\right\} y'+z'=2x+1;$

$y+z=x^2+x+1 \implies (y+z)'=2x+1.$

21. $y=x^2-1 \implies y'=2x \implies \frac{1}{2}y'=x;$

$z=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \implies z'=x.$

22. $y' = 2D(x-3) + \frac{1}{2} D(x^2+1) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} 2x = 2 + x.$

23. Véase figura 3.17.

24. Para que sea monomorfismo ha de ser la aplicación inyectiva. Evidentemente no lo es, pues cada $y' \in F$ es imagen de varias (infinitas) $y \in \mathcal{F}$.

25. $s = t^2 - \frac{1}{2} t \implies v = s' = 2t - \frac{1}{2} \implies a = v' = 2$. Ha resultado $a = 2$, una función constante, luego, efectivamente, es un movimiento uniformemente acelerado.

26. $v_2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7/2$ m/s; $\quad a_2 = 2$ m/s^2.

27. Siendo $s = t^2 - 2t$ una función continua, el cambiar de sentido supone que la velocidad pasa de positiva a negativa. Eso sucederá cuando la velocidad sea cero. Por tanto:

$$v = s' = 2t - 2 = 0 \implies t = 1 \text{ s.}$$

28. $s = \frac{1}{2} t^2 + t \implies v = s' = t + 1 \implies a = v' = 1.$

Al ser positiva la aceleración, el móvil va aumentando su velocidad.

29. $\left.\begin{matrix} y = 2u + 1 \\ u = x^2 \end{matrix}\right\} \implies y' = f'(u) \cdot g'(x) = (2u+1)' \cdot (x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x.$

30. $y = \sqrt[3]{2x} = (\sqrt[3]{u})' \cdot (2x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}.$

31. $v = s' = (w^2 - 2w)' \cdot (2t-1)' = (w-2) \cdot (2t) = (4t - 2 - 2) \cdot 2t = 8t^2 - 8t.$

32. $y = Lx \implies y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$
$\Downarrow$
$x = e^y$

33. Véase el número 11 del capítulo siguiente.

34. $v = 2t - \frac{2}{3} = 0 \implies t = \frac{1}{3}$ s.

35. $m = \operatorname{tg} \alpha \in (0, \pi/2).$

36. $y = f(x)$ es decreciente en (a, b), pues $y' < 0$, $\forall\ x \in (a, b)$.

37. $y' = x^2 - 7x + 12 = 0 \left\{\begin{matrix} x_1 = 3; \\ x_2 = 4. \end{matrix}\right.$

38. $y = x^2 - 3x + 4;$

$y' = 2x - 3 > 0 \implies x > 3/2$: y es creciente en $(3/2, +\infty)$;
$y' = 2x - 3 < 0 \implies x < 3/2$: y es decreciente en $(-\infty, 3/2)$.

39. $s=t^2-t+1$

$$v=s'=2t-1 \begin{cases} v>0 \Longrightarrow t>\frac{1}{2}. \text{ En el intervalo de tiempos } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \quad \text{«va hacia adelante»;} \\ v<0 \Longrightarrow t<\frac{1}{2}. \text{ En el intervalo de tiempos } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \\ \quad \text{«va hacia atrás».} \end{cases}$$

3.3

Derivación

En todos los casos, la determinación de la función derivada se reduce al cálculo de un límite. Lo que se pretende aquí es dar las diferentes técnicas del cálculo de ese límite para las funciones más usuales en estos niveles. De este modo, al final se conseguirá una colección de reglas para las derivadas de las funciones que se traten, ahorrándose así el engorroso trabajo del cálculo del límite-derivada cada vez que salga una de ellas.

1. FUNCION CONSTANTE. FUNCIONES LINEALES

La función constante $y=k$, $k \in R$, tiene siempre por gráfica una recta paralela al eje de abscisas (Fig. 3.29). La inclinación es 0° y la pendiente en todos los puntos de su dominio también es nula, de modo que

$$\boxed{y=k \quad ; \quad y'=0}$$

Para la función lineal $y=mx$ se calcula:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x)-mx}{\Delta x} = m$$

$$\boxed{y=mx \quad ; \quad y'=\frac{dy}{dx}=m}$$

Ejercicio 40

Observando la figura 3.29, *dibújese la gráfica de la función derivada de la lineal que ahí se representa.*

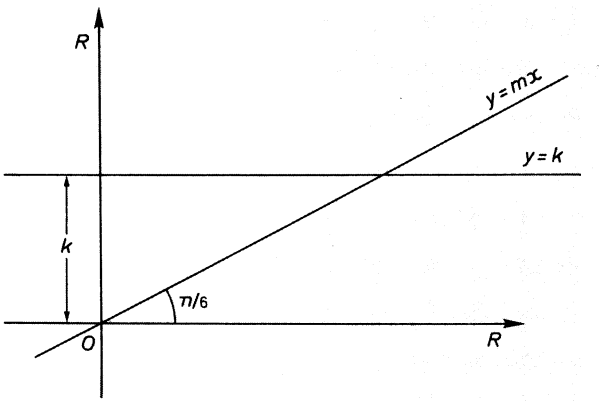


FIG. 3.29.

Ejercicio 41

¿Qué ángulo forman las gráficas de una función lineal y la de su derivada?

2. FUNCION POTENCIAL

Para calcular el límite derivada a que da lugar la derivación de una función del tipo $y=x^n$, $\forall\, n \in N$, es necesario manejar con soltura el desarrollo del binomio de Newton.

Ejemplo 14

Para establecer la función derivada de la función $y=x^3$ se actúa así:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2 \cdot \Delta x + \binom{3}{2} x \cdot \Delta^2 x + \binom{3}{3}\Delta^3 x - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta^2 x + \Delta^3 x - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x) = 3x^2.$$

El cálculo general para $y=x^n$ es del todo similar.

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\cdot\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\Delta^2x+\ldots+\binom{n}{n}\Delta^n x-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+\binom{n}{n}\Delta x^{n-1}\right)=$$

$$=\binom{n}{1}x^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

$$\boxed{y=x^n \quad ; \quad y'=\frac{dy}{dx}=n\cdot x^{n-1}}$$

Ejercicio 42

Apliquese la regla recién hallada y calcúlense las funciones derivadas de

a) $y=x^7$; *b)* $y=x^2$; *c)* $y=4x^5$.

(Adviértase, para el caso c), que esa función puede considerarse compuesta de $y=4u$ *y* $u=x^5$.*)*

3. FUNCIONES POLINOMICAS

Recordando que la derivación es una aplicación lineal, no es necesario hacer aquí ningún desarrollo para justificar la función derivada de cualquier función polinómica.

Ejemplo 15

$$y=3x^2-5x+2 \quad ; \quad y'=3D(x^2)-5D(x)+D(2)$$
$$y'=3\cdot 2x-5\cdot 1+0$$
$$y'=6x-5$$

Ejercicio 43

Establézcanse las funciones derivadas y sus valores en $x=-1$, *de las funciones:*

a) $y=2x^4-1/3\,x^2$; *b)* $y=1/3\,x^3+1/2\,x^2-4$; *c)* $y=(2x-1)^3$.

4. FUNCION LOGARITMICA

Conviene desarrollar ahora la derivada de la función $y = L_a(x)$ porque va a resultar un potente instrumento para cálculo de otras derivadas, lo que ahorrará el molesto cálculo del límite en muchos casos.

$$y = L_a(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L_a(x + \Delta x) - L_a(x)}{\Delta x}$$

La diferencia de logaritmos es el logaritmo de un cociente, de modo que

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \cdot L_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right) .$$

Dividamos y multipliquemos por x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot L_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right)$$

Un número multiplicando a un logaritmo es el exponente del logaritmo de la potencia, así es que

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot L_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)$$

El límite de un producto es el producto de los límites:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(L_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)$$

El límite de un logaritmo es el logaritmo del límite; por tanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot L_a\left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]$$

Y, como el límite del corchete es el número e,

$$y' = \frac{1}{x} \cdot L_a e$$

Se recuadra:

$$\boxed{y = L_a(x) \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot L_a e}$$

Ejercicio 44

Hállense las funciones derivadas de las que se proponen:

a) $y = L_2 x$; *b)* $y = \log x$; *c)* $y = Lx$.

Al hacer el tercer ejercicio *c)* del número 44 se habrá observado que, como el logaritmo neperiano de e es 1, resulta

$$y = Lx \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 16

Para determinar la función derivada de la $y = Lx^2$, basta tener en cuenta que se trata de la función compuesta de dos funciones:

$$y = Lu$$
$$u = x^2$$

Su derivada, según la regla de la derivación de «función de función», es:

$$y' = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

Ejercicio 45

Hállense las derivadas de las funciones

a) $y = L(x^2 + 3x)$; *b)* $y = \log (x^4 - 3x)$.

Si ha resultado molesta la deducción de la derivada de la función potencial usando el binomio de Newton, ahora vamos a utilizar esta derivada logarítmica para deducir de forma más cómoda la regla que allí se consiguió:

0. Se establece la función

$$y = x^n.$$

1. Se toman logaritmos neperianos

$$Ly = n \cdot Lx,$$

obteniéndose dos funciones iguales. Sus derivadas también lo serán.

2. Se deriva

$$D(Ly) = D(n \cdot Lx)$$

Ly es una función compuesta: la logarítmica de una y que, a su vez, es función de x, por lo que ha de aplicarse la regla de derivación de la «función de función».

$$\left.\begin{array}{l} D(Ly)=\dfrac{1}{y}\cdot y' \\ D(n\cdot Lx)=n\cdot\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{n}{x} \Longrightarrow y'=\frac{n}{x}\cdot x^n=n\cdot x^{n-1}$$

Como se ve, se ha obtenido la misma regla de derivación para la función potencial.

5. PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

Sea la función

$$y=u\cdot v \begin{cases} u=f(x) \\ v=g(x). \end{cases}$$

Se dispone de dos caminos para establecer la regla de derivación: uno, el cálculo del límite correspondiente; otro, la aplicación de la derivada logarítmica. Lo haremos de esta segunda manera, entendiendo $u>0$ y $v>0$, $\forall\, x$, y reservamos el interesante cálculo del límite para el ejercicio 46.

0. Se establece la función

$$y=u\cdot v$$

1. Se toman logaritmos neperianos

$$Ly=Lu+Lv$$

2. Se deriva

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}=\frac{u'\cdot v+v'\cdot u}{u\cdot v}$$

$$y'=\frac{u'\cdot v+v'\cdot u}{u\cdot v}\cdot(u\cdot v)$$

$$y'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

Se recuadra

$$\boxed{y=u\cdot v \begin{cases} u=f(x) \\ v=g(x) \end{cases} \quad ; \quad y'=u'\cdot v+v'\cdot u}$$

Ejercicio 46

Dedúzcase la regla para derivar el producto de dos funciones, desarrollando el límite correspondiente.

6. FUNCION DERIVADA DE $y=1/x$

Advirtamos de principio que, siendo $y=x$ derivable, $y=1/x$ también lo es, excepto en $x=0$, punto en el que no está definida $y=1/x$. De modo que, para todo $x \neq 0$ se tiene:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-x-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2+x\cdot\Delta x}=-\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{x}\quad;\quad y'=-1/x^2}$$

Si en lugar de la inversa de la variable, se tratara de la función $y=1/u$, en la que $u=f(x)$, bastaría aplicar la regla de derivación de las funciones compuestas, para conseguir

$$\boxed{y=\frac{1}{u}\quad;\quad y'=\frac{-1}{u^2}\cdot f'(x)}$$

Ejercicio 47

Establézcanse las funciones derivadas de

a) $y=1/Lx$; *b)* $y=1/\sqrt{x}$.

7. FUNCION DERIVADA DEL COCIENTE DE DOS FUNCIONES

Para conseguir la función derivada del cociente de las dos funciones derivables de x, $u=f(x)$ y $v=g(x)$, se utiliza el resultado recién conseguido:

$$y=\frac{u}{v}\quad;\quad y'=\frac{dy}{dx}=D\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)=u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'+\frac{1}{v}\cdot u'=$$

$$=u\cdot\left(-\frac{v'}{v^2}\right)+\frac{1}{v}\cdot u'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$

$$\boxed{y=\frac{u}{v}\begin{cases}u=f(x)\\ v=g(x)\end{cases}\quad;\quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}}$$

Ejercicio 48

Justifíquese, usando la derivación logarítmica, la regla para derivar un cociente de dos funciones derivables.

Ejercicio 49

Derívense los cocientes

$$a)\ y=\frac{x^2+1}{x^3}\ ; \qquad b)\ y=y^2/Lx\ ; \qquad c)\ y=\frac{L(x^2+x)}{x}.$$

8. FUNCION DERIVADA DE LA POTENCIAL DE EXPONENTE REAL

En el número 2 quedó establecida la regla de derivación para las funciones potenciales de exponente natural. Ahora se justificará que la misma regla es válida para cualquier exponente real.

8.1. Función potencial con exponente entero

La forma simbólica $y=x^{-n}$ significa $y=\frac{1}{x^n}$. Para determinar $D(x^{-n})$ se utiliza la regla conseguida en 6.

$$y'=-\frac{D(x^n)}{y^2}=-\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}}=-n\cdot x^{-n-1}$$

Como se ve, para exponentes enteros se mantiene el formalismo de la regla de derivación de la función potencial de exponente natural.

Ejercicio 50

Calcúlese la derivada de $y=L(x^{-2})$.

8.2. Función potencial con exponente racional; función «raíz»

Sea la función $y=x^{1/n}$ que sabemos significa $y=\sqrt[n]{x}$.
Usando la cómoda derivación logarítmica, se calcula su función derivada

$$Ly=\frac{1}{n}\cdot Lx$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x}\Longrightarrow y'=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{1/n}=\frac{1}{n}\cdot x^{1/n-1}$$

De nuevo, puede observarse que también para $n \in Q$ se conserva el formalismo de la regla de derivación para la función potencial de exponente natural.

Basta transformar la expresión simbólica conseguida para obtener la típica regla de derivación para una raíz, que se recuadra.

$$y = \sqrt[n]{x} \quad ; \quad y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Ejercicio 51

Exprésese la forma particular que toma la regla de derivación de una raíz, cuando es cuadrada.

Ejercicio 52

Calcúlense las derivadas de las funciones

a) $y = \sqrt{x}$; *b)* $y = \sqrt{x^2 + 3x}$; *c)* $y = (x^2 - 2x)^{-2/3}$.

8.3. Función potencial con exponente irracional

Ejemplo 17

Considérese la «función potencial» $y = x^a$, en la que a es un irracional. Para el valor de la variable $x = 2$, por. ejemplo, ¿qué significado tiene la potencia 2^a?

El exponente irracional a puede aproximarse con una sucesión creciente de números racionales

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \to a$$

Entonces

$$2^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, 2^{a_n}, \ldots$$

es una sucesión de reales, fácilmente demostrable como creciente y acotada por 2^b, siendo b un racional mayor que a. Por tanto, tiene límite, y ese límite, por definición, es 2^a:

$$2^a = \lim_{n \to \infty} 2^{a_n} \quad , \quad (a_n) \to a$$

Por tanto,

$$x^a = \lim_{n \to \infty} x^{a_n} \quad , \quad a_n \to a \quad , \quad \forall\, x \in R$$

Lo anterior permite mantener el formalismo de la regla de derivación de las funciones «potenciales» para exponentes irracionales.

Aunando los resultados conseguidos en el número 2 y en este número 8, se concluye:

$$\boxed{y=x^n \quad ; \quad y'=n\cdot x^{n-1} \quad , \quad \forall\, n\in R}$$

Ejercicio 53

Derívense las funciones

a) $y=x^e$; *b)* $y=(Lx)^\pi$.

9. FUNCION DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL

La función exponencial $y=a^x$ es, como se sabe, la función recíproca o inversa de la logarítmica $y=L_a x$, de modo que su composición produce la función logarítmica $y=x$.

Se pueden usar dos caminos para determinar la función derivada de una exponencial: se expone el de la derivación logarítmica y se propone como ejercicio el que utiliza la regla de derivación de las funciones recíprocas.

$$y=a^x$$
$$Ly=x\cdot La$$
$$\frac{y'}{y}=1\cdot La \Longrightarrow y'=a^x\cdot La$$

$$\boxed{y=a^x \quad ; \quad y'=\frac{dy}{dx}=a^x\cdot La}$$

Ejercicio 54

Dedúzcase la regla de derivación de la función exponencial a partir de la función derivada de su recíproca logarítmica.

Ejercicio 55

Calcúlense las derivadas de

a) $y=7^x$; *b)* $y=(x^2-1)^x$.

Ejemplo 18

Cuando la base de la función exponencial es el número e, su función derivada se simplifica, ya que $Le = 1$:

$$y = e^x \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = e^x$$

Así, obsérvese cómo se deriva la función $y = e^{x^2-1}$:

$$Ly = (x^2 - 1) \cdot Le$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \Longrightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2-1}$$

Conviene no perder de vista en qué puntos la función derivada de una dada no está definida; es decir, cuál es el dominio de la función derivada.

En la figura 3.30 se representa la función logarítmica $y = Lx$, cuya función derivada es $y' = 1/x$. Obsérvese que en ambas funciones ha de ser x mayor que cero. La gráfica de la derivada es, por tanto, la rama de hipérbola representada en la misma figura.

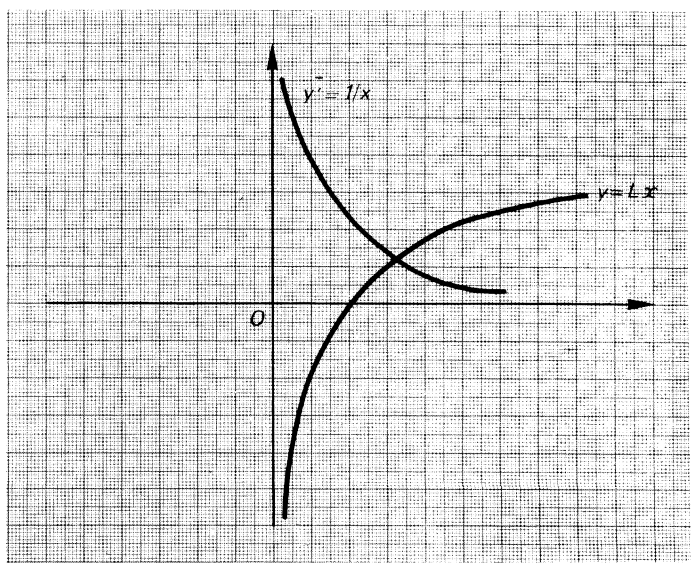


FIG. 3.30.

Ejercicio 56

Determínese en qué punto real la función $y = a^x$ y su derivada alcanzan el mismo valor.

10. FUNCIONES DERIVADAS DE LAS FUNCIONES GONIOMETRICAS

10.1. Función seno

A falta en este curso de las fórmulas que transforman la suma (diferencia) de funciones goniométricas en productos, la función derivada de la función seno puede deducirse así:

Coincidiendo con lo que se intuye, es fácilmente justificable que el límite del cociente entre la cuerda y su arco, cuando éste tiende a cero, es la unidad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{AT}{\Delta x} = 1$$

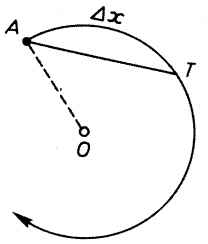


FIG. 3.31.

Ello quiere decir que son infinitésimos equivalentes y que se pueden sustituir uno por el otro en las expresiones de límites, en que figuren como factores o divisores.

Considérese ahora la figura 3.32. De ella se deduce que

$$\frac{\Delta \operatorname{sen} x}{AT} = \cos \alpha$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la cuerda AT tiende a ser la tangente en T, y, entonces, $\alpha \to x$. Por tanto, se escribe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \operatorname{sen} x}{AT} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \cos x$$

Se ha conseguido de esta manera la función derivada de $y = \operatorname{sen} x$, que es

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \cos x}$$

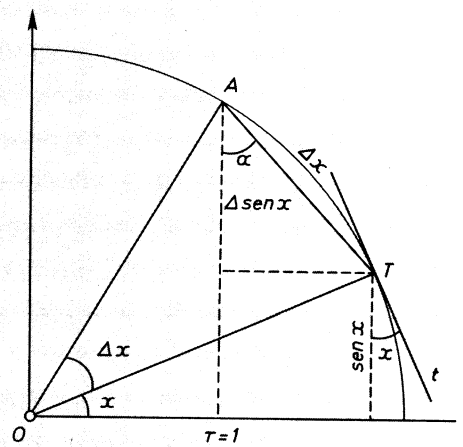


FIG. 3.32.

Ejercicio 57

Determínense las siguientes derivadas:

a) $y=\operatorname{sen} 7x$; *b)* $y=\operatorname{sen}(Lx)$; *c)* $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

10.2. Función coseno

La función

$$y=\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

se puede considerar compuesta de estas dos funciones:

$$y=\operatorname{sen} u$$
$$u=\frac{\pi}{2}-x$$

Su derivada es, entonces,

$$y'=u'\cdot D\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$y'=\cos u\cdot(-1)=-\cos u=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Y, teniendo en cuenta la relación entre las funciones goniométricas de ángulos complementarios, se obtiene

$$\boxed{y=\cos x \quad ; \quad y'=\frac{dy}{dx}=-\operatorname{sen} x}$$

Ejercicio 58

Justifíquese que la función derivada de la función tangente, en los puntos en que existe, toma la forma

$$y = \operatorname{tg} x \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x = \sec^2 x$$

Ejercicio 59

Dígase cuál es la función derivada de la función $y = \operatorname{ctg} x$.

Ejercicio 60

Teniendo en cuenta que la secante y cosecante de un ángulo son los valores inversos. de sus coseno y seno, respectivamente, establézcanse las funcions derivadas de

$$y = \sec x \quad \text{y de} \quad y = \operatorname{cosec} x.$$

Ejercicio 61

Calcúlense las siguientes derivadas:

a) $y = L(\cos x)$;
b) $y = \operatorname{tg}(x^2 - 2x)$;
c) $y = \operatorname{sen} 2x$;
d) $y = \cos \frac{x}{2}$;
e) $y = L\sqrt{x}$;
f) $y = L\sqrt{x/2}$;
g) $y = L\sqrt{\operatorname{sen} x}$;
h) $y = L\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

11. FUNCIONES DERIVADAS DE LAS INVERSAS DE LAS FUNCIONES GONIOMETRICAS

Se trata simplemente de aplicar la regla de derivación de las funciones inversas (número 7 del capítulo anterior).

11.1. Función arco seno

$$y = \text{arc sen } x \quad ; \quad x = \text{sen } y$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 1/x' \Longrightarrow y' = 1/\cos y = 1/\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 y} = 1/\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{y = \text{arc sen } x \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}}$$

11.2. Función arco coseno

$$y = \text{arc cos } x \quad ; \quad x = \cos y$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{1}{x'}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{-1}{\text{sen } y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{y = \text{arc cos } x \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}}}$$

11.3. Función arco tangente

$$y = \text{arc tg } x \quad ; \quad x = \text{tg } y$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{1}{x'}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$$

Ejercicio 62

Establézcanse las funciones derivadas de las funciones arcos cosecante, secante y cotangente.

12. FUNCIONES PRIMITIVAS

Ya se sabe, dada una función derivable, obtener su función derivada.

Se puede plantear el problema inverso, es decir, dada la función derivada, determinar a qué *funciones primitivas* corresponde. Efectivamente, ese es el nombre que reciben las funciones-antecedente en la aplicación derivación

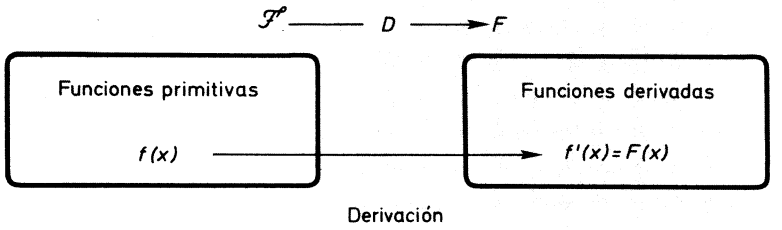


FIG. 3.33.

Este problema recibe el nombre de *integración* y su símbolo es $\int$. Se trata de una «ese» mayúscula estilizada.

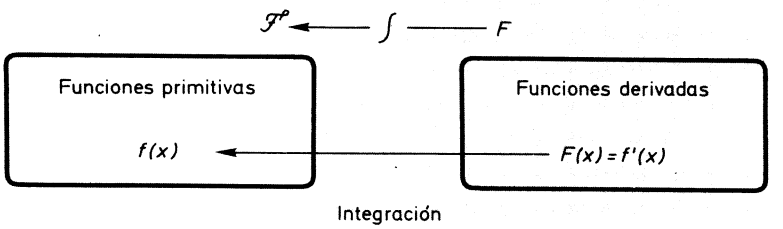


FIG. 3.34.

Ya quedó establecido que la aplicación derivación no es inyectiva (consúltense los ejercicios 23 y 24 y sus soluciones); por tanto, su correspondencia recíproca no es aplicación; es decir:

> A una función derivada le corresponden una infinidad de funciones primitivas.

Ejercicio 63

Calcúlense las derivadas de $y=x^3$; $y=x^3+7$; $y=x^3-12$, *observando sobre ellas la proposición recuadrada.*

Efectivamente, a una función derivada le corresponden un número infinito de primitivas: todas las que difieren en una constante.

La función $y=f(x)+k$ se puede considerar formada por la adición de las funciones

$$u=f(x)$$

$$v=k \text{ (constante)};$$

y, así, su función derivada será la suma de las funciones derivadas de u y de v

$$y'=f'(x)+0$$

La función $f'(x)$ es la derivada de las infinitas primitivas

$$y=f(x)+k \quad , \quad \forall\, k \in R$$

$$\boxed{\int f'(x)=f(x)+k \quad , \quad \forall\, k \in R}$$

Dejando la técnica de la integración para cursos superiores, citaremos aquí las llamadas *integrales inmediatas*. Su cálculo se reduce a saber «leer al revés» las reglas de derivación.

Ejemplo 19

$$\int x=\frac{1}{2}x^2+k$$

$$\int x^2=\frac{1}{3}x^3+k$$

$$\int 1/x=Lx+k$$

$$\int \cos x=\operatorname{sen} x+k$$

$$\int \operatorname{sen} x=-\cos x+k$$

Ejercicio 64

Calcúlense las funciones primitivas de las siguientes funciones

a) $\int (x^2 + 2x + 1)$;

b) $\int e^x$;

c) $\int 2^x$;

d) $\int \sqrt{x}$;

e) $\int \sec^2 x$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.3

40.

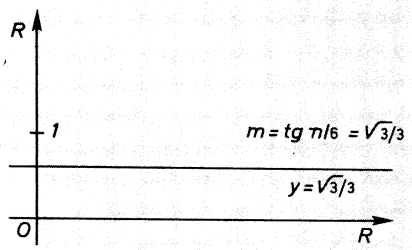


FIG. 3.35.

41. El ángulo coincide con la inclinación de la recta representante de la función lineal.

42. *a)* $y' = 7x^6$; *b)* $y' = 2x$; *c)* $y' = 4 \cdot 5x^4 = 20x^4$.

43. *a)* $y' = 8x^3 - \frac{2}{3}x$;
$y'(-1) = -22/3$

b) $y' = x^2 + x$;
$y'(-1) = 0$

c) $y' = 3 \cdot (2x - 1) \cdot 2 = 12x - 6$.
$y'(-1) = -18$

44. *a)* $y' = \frac{1}{x} \cdot L_2 e$; *b)* $y' = \frac{1}{x} \cdot \log e$; *c)* $y' = \frac{1}{x}$.

45. *a)* $y' = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3)$; *b)* $y' = \frac{1}{x^4 - 3x} \cdot \log e \cdot (4x^3 - 3)$.

46. $D(f \cdot g)(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)(x + \Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \cdot$$

Sumando y restando al numerador de la expresión del límite $f(x) \cdot g(x + \Delta x)$ y sacando luego factor común, resulta:

$$D(f \cdot g)(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot [g(x + \Delta x - g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot [g(x + \Delta x) = g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) +$$

$$+ f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot$$

Siendo g derivable, es continua, lo cual permite escribir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) - g(x)$$

Sustituyendo

$$D(f \cdot g)(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

47. *a)* $y' = -\frac{1}{(Lx)^2} \cdot \frac{1}{x}$; *b)* $y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot$

48. $y = \frac{u}{v}$; $Ly = Lu - Lv$; $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$;

$$y' = \frac{u}{v} \cdot \left(\frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{u \cdot v} \right) = \frac{u'v - v'u}{u^2}$$

49. *a)* $y' = \frac{2x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^2 + 1)}{6}$;

b) $y' = \frac{2x \cdot Lx - 1/x \cdot x^2}{(Lx)^2}$;

c) $y' = \frac{\frac{1}{x^2 + x} \cdot (2x + 1) \cdot x - 1 \cdot L(x^2 + x)}{x^2} \cdot$

50. $y = L(x^{-2})$; $\quad y' = \dfrac{1}{x^{-2}} \cdot (-2x^{-3})$.

51. $y = \sqrt{x} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot$

52. *a)* $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\quad$ *b)* $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} \cdot (2x+3)$;

$y' = -\dfrac{2}{3}(x^2-2x)^{-5/3} \cdot (2x-2)$.

53. *a)* $y = e \cdot x^{e-1}$; $\quad$ *b)* $y' = \pi(Lx)^{\pi-1} \cdot \dfrac{1}{x}$.

54. $y = a^x \Longleftrightarrow x = L_a y$

$\Downarrow$

$$y' = \frac{1}{x'} \Longrightarrow y' = \frac{1}{\frac{1}{y} L_a e} = \frac{1}{\frac{1}{a^x} \cdot L_a e} = a^x \cdot \frac{1}{L_a e} = a^x \cdot La.$$

55. *a)* $y' = 7^x \cdot L7$; $\quad$ *b)* $y' = (x^2-1)^x \cdot L(x^2-1) \cdot 2x$.

56. $y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \cdot La$.

Las ordenadas de sus puntos son siempre proporcionales. No hay intersección de sus gráficas.

57. *a)* $y' = 7 \cdot \cos 7x$; $\quad$ *b)* $y' = \dfrac{1}{x} \cdot \cos(Lx)$; $\quad$ *c)* $y' = \cos x$.

58. $y = \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$;

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot$$

Las otras formas son simples identidades goniométricas. Consúltese, si es necesario, la solución del ejercicio 66 *d)* del capítulo 2.3.

59. $y = \operatorname{ctg} x$; $\quad y' = D\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$.

Y también,

$$y' = D\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

60. $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$

$y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x = -\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen} x}$

61. *a)* $y' = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$;

b) $y' = \sec^2(x^2-2x) \cdot (2x-2)$;

c) $y' = 2 \cdot \cos 2x$;

d) $y' = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$;

e) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$;

f) $y' = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}$;.

g) $y' = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$;

h) $y' = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \cdot$

$$\cdot \frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x) + \operatorname{sen} x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \operatorname{cosec} x.$$

62. $y = \operatorname{arc\,cosec} x \Longrightarrow x = \operatorname{cosec} y$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\operatorname{ctg} y/\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{cosec} y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{cosec}^2 y} \cdot \operatorname{cosec} y} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} ;$$

$y = \operatorname{arc\,sec} x \Longrightarrow x = \sec y$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\operatorname{tg} y/\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sec^2 y} \cdot \sec y} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \operatorname{arc\,ctg} x \Longrightarrow x = \operatorname{ctg} y$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\operatorname{ctg}^2 y - 1} = \frac{-1}{1+x^2}$$

63. $\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = x^3 + 7 \\ y = x^3 - 12 \end{array}\right\} \Longrightarrow y' = 3x^2.$

64. *a)* $\int (x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + k$;

b) $\int e^x = e^x + k$;

c) $\int 2^x = \frac{1}{L2} \cdot 2^x + k$;

d) $\int \sqrt{x} = \int x^{1/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} + k$;

e) $\int \sec^2 x = \operatorname{tg} x + k.$

3.4

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Establézcase la derivada de la función

$$y=(x-\sqrt{1-x^2})^2$$

y determínense los valores de x que la anulan.

2. Utilizando la derivada logarítmica, establézcase W', siendo

$$W=\frac{(4-t^2)^4\cdot\sqrt{2+t}}{\sqrt[3]{2-t}}.$$

3. Dése en su forma más simplificada la función derivada de

$$y=L\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

4. Calcúlese la derivada de $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\cos x}$.

5. Establézcase la ecuación de la tangente a la gráfica de la función

$$y=x(x^2-4x+5)$$

en su punto de abscisa 2.

6. Determínense los puntos en los que las tangentes a la curva

$$y=\frac{x-1}{x+2}$$

son paralelas a la primera bisectriz. Establézcanse después las ecuaciones de esas tangentes.

7. Determínese la función derivada de $y=x^{1/x}$.

8. Hállese la derivada de la función $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

9. Determínense los puntos en los que la función $y=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ tiene su segunda derivada nula.

10. Las rectas tangente y normal a la curva $y=x^3$ en el punto de abscisa 2 forman con el eje de abscisas un triángulo del que se pide su área.

11. Determínese la función derivada de la logarítmica $y=L(\cos 3x)$.

12. Hállese el valor de la diferencial de $\operatorname{sen} x$ en $x=\pi$, para un $\Delta x=\dfrac{\pi}{9}$.

13. Un móvil M describe sobre un eje horizontal un movimiento de ecuación $s=t^3-3t+5$. Establézcase y represéntese la función velocidad, indicando en qué instante se anula la aceleración.

14. Justifíquese que la función $y=\dfrac{2}{x}$ es decreciente, excepto para $x=0$.

15. Estúdiese el crecimiento de la función $y=4x^2-10x+3$ en $x=1$.

16. Determínese el dominio, los puntos de discontinuidad y la función derivada de la función

$$y=\frac{x^2+2x+1}{2x^2-x-1}.$$

17. Determínese el dominio de la función $y=\sqrt{25-x^2}$. ¿En qué puntos no es derivable?

18. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f'(x)-g'(x)=0$, ¿es posible que $f(x)-g(x)=2$?, ¿y $f(x)-g(x)=5x$? Justifíquese lo que se afirme.

19. Determínese la diferencial de $\cos x+Lx^2$.

20. ¿Cuál es la diferencia entre Δy y dy para la función $y=x^3$ en $x=2$, si $\Delta x=dx=10$?

21. Calcúlese para qué valor de x se anula la segunda derivada de

$$y=\frac{e^x}{1+e^x}.$$

22. Determínese el valor del parámetro k para que la función

$$y=\frac{x^2+k}{x^2-k}$$

tenga una derivada que, en $x=2$, valga 1.

23. Hállese el valor de la derivada de $y=e^{\cos x}$ para $x=\pi/2$.

24. Dada la función

$$y=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

establézcase su derivada lo más simplificada posible.

25. Calcúlese el valor de la derivada de $y=\dfrac{x^2-x}{e^x}$ para $x=0$.

26. Derívese: $y=e^{\text{arc tg } x}$.

27. Utilícese la derivada logarítmica para la derivación de la función $y=x^{\text{tg } x}$.

28. Establézcase la función derivada de $y=x^{\text{sen } x}$.

29. Dedúzcase la derivada enésima de $y=L(1+x)$.

30. Hállense las derivadas primera, segunda y tercera de

$$y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Luego formúlese su derivada enésima.

31. Determínese la suma de las 10 primeras derivadas sucesivas de $y=a^x$.

32. Sin necesidad de cálculo, puede asegurarse que la función derivada de $y=\text{sen}^2 x+\cos^2 x$ es $y'=0$. Razónese.

33. Calcúlese la derivada de

$$y=L\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}.$$

34. Determínese la derivada de $y=e^{\cos x}$.

35. Derívese la función

$$y=\text{tg}\frac{x-1}{x+1}.$$

36. Hállese la derivada de

$$y=L\frac{x^2+3}{2x+1}.$$

37. Determínense los intervalos de crecimiento de la función

$$y=-x^2+7x-12.$$

38. Hállense los intervalos en que la función derivada de $y=x^2+2x+1$ es positiva.

39. Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y=\frac{1}{x-1}.$$

40. Analícese el crecimiento de la función $y = 1/x^2$ para $x < 0$.

41. Una bola de tenis lanzada hacia arriba llega a una altura $h = 6 + 24t - 5t^2$ al cabo de t segundos. Determínense su velocidad y aceleración en $t = 3$ s. ¿Cuál es el punto más alto de su trayectoria?

42. Justifíquese que en el movimiento $s = a \cdot e^{kt} + b \cdot e^{-kt}$ la aceleración es proporcional al espacio.

43. La función $y = x^2 - x + 1$ tiene infinitas primitivas. Establézcase la que tiene el par (2, 4).

44. Hállese $\int \sqrt{x^3}$.

45. Una curva que contiene al punto (0, 3) tiene de pendiente en cada uno de sus puntos x el valor de $2 - 2x$. Establézcase la función que representa.

3.5

Autoevaluación A-3

1. La recta r pertenece al haz de centro en origen y pasa por el punto $(-2, -2)$. Su pendiente es

a) 45°;
b) no es posible el planteamiento;
c) -1;
d) $\operatorname{tg} \pi/4$.

2. La inclinación de la recta anterior es

a) $\pi/4$;
b) -1;
c) 1;
d) 45°.

3. Tangente a una curva en su punto (x_0, y_0) es

a) la recta que sólo la toca en ese punto;
b) la derivada;
c) tal que $m = y'(x_0)$ y $(x_0, y_0) \in r$;
d) la derivada particularizada para ese punto.

4. La pendiente de la tangente en el punto $(a, f(a))$ a la curva $y = f(x)$ es

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$;

b) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

c) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$;

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\Delta a}$.

5. La función derivada de la $y=f(x)$ es

a) $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

b) $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a)-f(x)}{x-a}$;

c) $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(\Delta x)}{\Delta x}$;

d) $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.

6. El límite del cociente incremental, cuando $\Delta x \to 0$, es

a) la diferencial;
b) la derivada;
c) depende del entorno de la tangente;
d) la variación de la ordenada de la tangente.

7. La función derivada de una rectilínea a trozos es

a) una escalonada;
b) una función constante;
c) no tiene derivada por ser discontinua;
d) una función lineal.

8. Todas las funciones primitivas de una escalonada son

a) funciones lineales;
b) funciones rectilíneas a trozos;
c) no se puede derivar otra vez;
d) un conjunto de funciones constantes.

9. Si una función es continua en $x=a$

a) se puede derivar;
b) su derivada también es continua en a;
c) es posible que se pueda derivar en a;
d) no es posible derivar en ese punto.

10. Una función continua rectilínea a trozos

a) es derivable en todo su dominio;
b) no es derivable en los «puntos angulosos» de su recorrido;
c) tiene por derivada una escalonada continua;
d) no se puede derivar.

11. La función $y=f(x)$ tiene en $x=a$ un valor de su función derivada $f'(a)=-2$. Por eso se puede asegurar que

a) es continua en a;
b) es creciente en a;
c) se trata de una lineal, pues $f'(x)$ es constante;
d) no se puede asegurar nada de lo anterior.

12. La aplicación derivación del conjunto de las funciones derivables en las continuas es

a) exhaustiva;
b) biyección;
c) inyectiva;
d) no inyectiva.

13. La función polinómica $y=f(x)$ es de tercer grado; por eso, puede decirse que tiene su

a) tercera derivada nula;
b) su cuarta derivada nula;
c) su tercera derivada lineal;
d) su cuarta derivada constante no nula.

14. De dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que $f'(x)\cdot g'(x)=1$. Ello indica que

a) $f(x)\cdot g(x)=1$;
b) $f[g(x)]=1$;
c) $f(x)\cdot g^{-1}(x)=1$;
d) $f^{-1}(x)\cdot g(x)=1$.

15. Con las n derivadas sucesivas de una función continua derivable se forma una sucesión de términos iguales no nulos. Se trata de

a) $y=Lx$;
b) $y=x$;
c) $y=e^x$;
d) $y=$constante.

16. Una función continua y derivable, $y=f(x)$, en (a, b) es creciente en $(a, c]$ y decreciente en $[c, b)$. Con este planteamiento, sólo una de las afirmaciones siguientes es correcta. Márquese.

a) $y'(c)=0$;
b) y' no existe en c;
c) $y'(a)>0$;
d) $y'(b)<0$.

17. La derivada de la función $y=f(x)$ es $y'=x^{-1}$. La función puede ser

a) $y=x^{-2}$;
b) $y=1/x^2$;
c) $y=Lx+4$;
d) $y=e^x$.

18. La derivada de la función $y=2^x$ es

a) $y'=x\cdot 2^{x-1}$;
b) $y'=L_2 x$;
c) $y'=1/2^x$;
d) $y'=2^x\cdot L2$.

19. El valor de la función derivada de la $y=x^{-1}$ en $x=0$ es:

a) no existe;
b) $y'=-1/x^2$;
c) $y'=Lx$;
d) $y'=-1\cdot x^{-2}$.

20. El valor de $La\cdot L_a e$ es

a) cero;
b) depende de a;
c) uno;
d) menos uno.

21. La derivada de $y=L(\operatorname{sen} x)$ es

a) $y'=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$;
b) $y'=\operatorname{ctg} x$;
c) $y'=\cos(Lx)$;
d) $y'=L(\operatorname{ctg} x)$;

22. Una primitiva de la función $y'=-x^{-2}$ puede ser

a) $y=Lx^2$;
b) $y=\dfrac{1}{x}+\pi$;
c) $y=+3x^{-1}$;
d) $y=1/x^3$.

23. Como $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\operatorname{sen} x$, una primitiva de la función $y'=\operatorname{tg} x$ puede ser

a) $y=-L(\cos x)+L\pi$;
b) $y=\operatorname{ctg} x$;
c) $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$;
d) $y=L(\cos x)$.

24. Las sucesivas derivadas de la función $y=f(x)$ forman una progresión geométrica de razón La. Ello indica que la función aludida puede ser

a) $y=Lx$;
b) $y=a^x$;
c) $y=L_a x$;
d) $y=1/a$.

25. La función continua $y=f(x)$ está definida en el intervalo (a, b), pero tiene «un punto anguloso» en c $(a<c<b)$. El dominio de su función derivada es

a) $(a, c] \cup [c, b)$;
b) $[a, b]-\{c\}$;
c) $(a, c) \cup (c, b)$;
d) $[a, c] \cup [c, b]$.

26. Una función primitiva de $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ puede ser:

a) $y=L(1+x^2)$;
b) $y=\dfrac{1}{2}L(1+x^2)$;
c) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;
d) $y=\text{arc tg } x$.

27. Siendo $f(x)$ y $g(x)$ dos primitivas distintas de la función $y'=x^2$, sólo una de las cuatro igualdades que siguen puede ser cierta. Márquese.

a) $f(x)-g(x)=0$;
b) $g(x)-f(x)=0$;
c) $f(x)-g(x)=2x$;
d) $f(x)-g(x)=e$.

28. La derivada de $s=\cos^2 t$ es

a) $s'=2\cos t$;
b) $s'=-2\,\text{sen } t$;
c) $s'=2\cos t\,(-\text{sen } t)$;
d) $s'=1/\text{tg } t$.

29. Se dice de un movimiento que es vibratorio armónico cuando sus espacios son proporcionales a sus aceleraciones en cada instante. Descúbrase cuál de los cuatro movimientos que se plantean es vibratorio armónico:

a) $s=\cos^2 t+t^2$;
b) $s=a\cdot e^{kt}+b\cdot e^{-kt}$;
c) $s=Lt$;
d) $s=e^t+t$.

30. La elongación (espacio) de un movimiento pendular responde a una determinada ley $s=f(t)$. En los puntos extremos del movimiento, en los que «la lenteja» vuelve, la función derivada $s'=f'(t)$ toma el valor

a) máximo;
b) mínimo;
c) cero;
d) se necesita la forma de la función para poder calcular.

31. Dada la función $y = x^2 - 6x + 5$, determínese:

1. La pendiente de la tangente en $x = 8$.
2. La ecuación de esa tangente.
3. La pendiente de la normal en $x = 8$.
4. La ecuación de esa normal.
5. El área del triángulo que forman ambas rectas con el eje de abscisas.

32. Dada la función $y = +x - 4$, averígüense:

1. su dominio;
2. intervalos de crecimiento;
3. su función derivada;
4. el dominio de su función derivada.

33. Derívese

$$y = L\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

34. Establézcase la función derivada de la que se propone, usando la derivación logarítmica.

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}.$$

35. Hállese la función primitiva de la derivada $y' = 2x - 5$, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-3

1. *d).*	**7.** *a).*	**13.** *b).*	**19.** *a).*	**25.** *c).*
2. *d).*	**8.** *b).*	**14.** *b).*	**20.** *c).*	**26.** *d).*
3. *c).*	**9.** *c).*	**15.** *c).*	**21.** *b).*	**27.** *d).*
4. *c).*	**10.** *b).*	**16.** *a).*	**22.** *b).*	**28.** *c).*
5. *a).*	**11.** *a).*	**17.** *c).*	**23.** *a).*	**29.** *b).*
6. *b).*	**12.** *d).*	**18.** *d).*	**24.** *b).*	**30.** *c).*

31. 1. $m_t = 10$; 2. $t = y - 10x + 59 = 0$; 3. $m_n = -1/10$;
4. $n \equiv 10y + x - 218 = 0$; 5. $S = \frac{1}{2}(218 - 5{,}9) \cdot 21 = 2227{,}05$.

32. 1. dominio $= [4, +\infty)$;
2. la función es creciente en todo su dominio;
3. $y' = 1/2\sqrt{x-4}$;
4. dominio de $y' = (4, +\infty)$.

33. Véase el ejercicio 61 *h).*

34. $y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \cdot [-\operatorname{sen} x \cdot L(\operatorname{sen} x) + \operatorname{ctg} x \cdot \cos x]$.

35. $y = x^2 - 5x + 4$.

UNIDAD TEMATICA 4

ESPACIO VECTORIAL

4.1. Vectores en el plano y en el espacio físicos

1. *Vectores ligados. Características*
2. *Relación de equipolencia*
3. *La noción de vector libre*
4. *Adición de vectores libres*
5. *El grupo aditivo de los vectores libres*
6. *Producto de un número real por un vector*
7. *Propiedades del producto* $R \times \mathfrak{V} \xrightarrow{\cdot} \mathfrak{V}$
8. *Concepto de espacio vectorial*
9. *Componentes de un vector en el plano*
10. *Vectores en el espacio*
11. *Componentes de un vector en el espacio*

4.2. La estructura de espacio vectorial

1. *Axiomática de un espacio vectorial*
2. *Teoremática inmediata de un espacio vectorial*
3. *Combinaciones lineales*
4. *Concepto de dependencia e independencia lineal*
5. *Base de un espacio vectorial. Dimensión*
6. *Isomorfismo entre* V_2 *y* R^2
7. *Cambio de base en un espacio vectorial*
8. *Subespacios de un espacio vectorial*

4.3. Ejercicios y problemas de recapitulación

4.4. Autoevaluación A-4

4.1

Vectores en el plano y en el espacio físico

1. VECTORES LIGADOS. CARACTERISTICAS

Sea $\mathcal{P}$ el plano considerado como conjunto de puntos. Se establece el producto cartesiano

$$\mathcal{P} \times \mathcal{P} = \{(P, Q)/P \text{ y } Q \in \mathcal{P}\}$$

Se define:

> Vector de origen P y extremo Q es cada uno de los elementos (P, Q) del producto cartesiano $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$.

Un vector, entonces, no es otra cosa que un par ordenado de puntos del plano. Ese orden puede expresarse gráficamente por medio de una flecha de origen en P y de punta en Q (Fig. 4.1).

El punto origen de un vector suele denominarse también «punto de aplicación» del mismo.

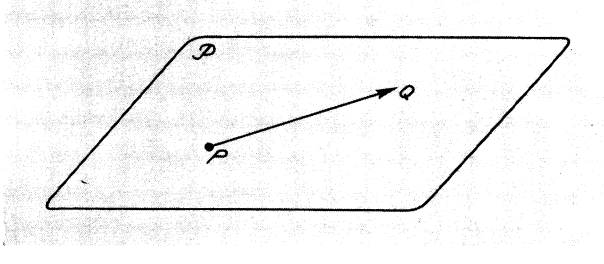


FIG. 4.1.

En todo vector pueden definirse tres características: *dirección, sentido* y *módulo.*

Dirección de un vector

Antes de analizar y establecer la definición, conviene definir el concepto genérico de *dirección.*

Sobre el conjunto de todas las rectas del plano se establece la relación de *paralelismo*, que representaremos por //.

Sean a y b dos rectas del plano. Se define que son paralelas de la siguiente manera:

$$a \,//\, b \iff (a \equiv b) \vee (a \cap b = \phi)$$

Es decir: a es paralela a b si no tienen ningún punto común o ambas coinciden.

Ejercicio 1

Justifíquese que la relación de paralelismo es una relación de equivalencia.

Se denomina *dirección* a cada una de las clases de equivalencia de la relación de paralelismo que se acaba de establecer. Así, pues, una dirección es el conjunto de todas las rectas que son paralelas entre sí. Una sola recta determina una dirección, es decir, la clase a la que pertenece.

Ahora, ya se está en condiciones de definir dirección de un vector.

> *Dirección de un vector es la dirección de la recta que lo contiene.*

Sentido de un vector

Dentro de los vectores que tienen la misma dirección, por ejemplo los vectores que se hallan sobre la misma recta, de una manera intuitiva reconocemos que los dos vectores (P, Q) y (R, S) tienen algo en común, mientras

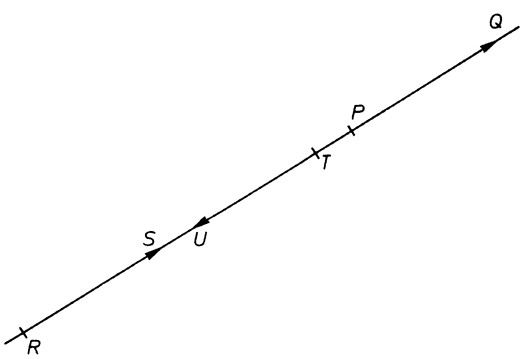


FIG. 4.2.

que ninguno de los anteriores lo tiene con el vector (T, U). La diferencia estriba en que un móvil que se trasladara del origen al extremo de (P, Q) tendría un sentido de movimiento igual al del móvil que fuera de R a S, pero opuesto al del que recorriera el tercer vector desde T hasta U. Esta idea permite comparar dos vectores con la misma dirección en lo que respecta a su sentido, pudiendo decir si tienen el mismo u opuesto sentido.

Distinguiremos dos casos, según que los vectores tengan la misma base —es decir, estén contenidos en la misma recta— o bases distintas, necesariamente rectas paralelas, ya que los vectores a comparar han de tener, como se ha dicho, la misma dirección.

En el primer caso (Fig. 4.3) se dicen que tienen el mismo sentido si la intersección de las semirrectas del mismo origen, que les contienen, es una semirrecta; en caso contrario, o sea, cuando la intersección es el vacío o un segmento, se dicen que tienen sentidos opuestos.

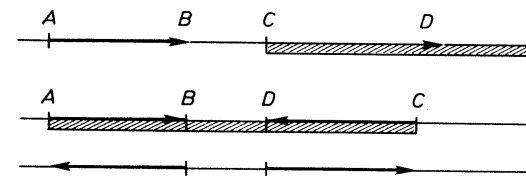


FIG. 4.3.

En el segundo caso, cuando tienen distinta base, se dice que tienen el mismo sentido si están contenidos en el mismo semiplano de los determinados por la recta que une sus puntos de aplicación u orígenes; y son dos vectores de sentidos opuestos si están contenidos en uno y otro semiplano, respectivamente (Fig. 4.4).

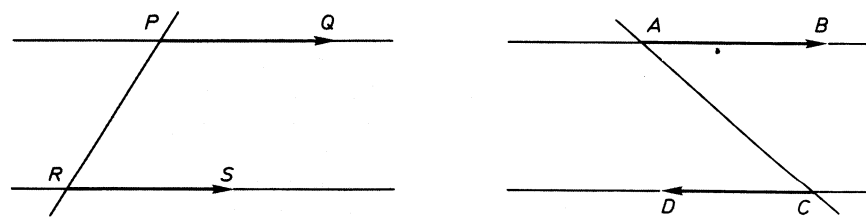


FIG. 4.4.

Módulo de un vector

Definiremos el módulo del vector (P, Q) como la longitud del segmento PQ, respecto de una determinada unidad.

La longitud es el número que corresponde al extremo Q, cuando al origen del vector se le asigna el 0 y al extremo del segmento unitario u el 1 (Fig. 4.5).

FIG. 4.5.

Este número está determinado en virtud de la biyección existente entre los puntos de una recta y los números reales.

2. RELACION DE EQUIPOLENCIA

Una vez que se tiene el conjunto de vectores del plano, es posible definir en él una relación de equivalencia, llamada *equipolencia* de vectores, del siguiente modo:

> Los vectores (P, Q) y (R, S) son equipolentes, y lo denotaremos
>
> $$(P, Q) \sim (R, S)$$
>
> si, o bien el cuadrilátero $PQSR$ es paralelogramo, o bien, en el caso de que P, Q, R y S estén alineados, existe un vector (A, B) tal que los dos cuadriláteros $PQBA$ y $RSBA$ son paralelogramos.

Este establecimiento de equipolencia de vectores queda de manifiesto en la figura 4.6.

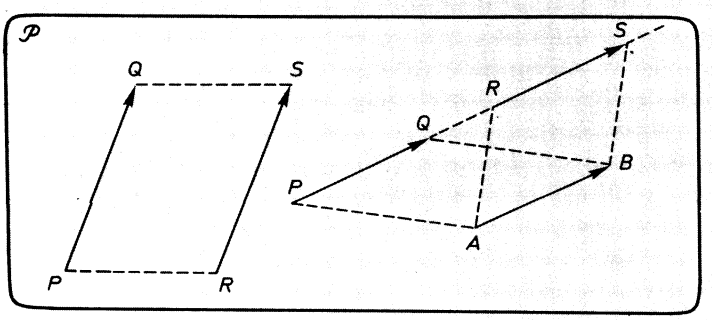


FIG. 4.6.

Queda por ver que, efectivamente, la relación de equipolencia así definida es una relación de equivalencia. La justificación de sus propiedades esenciales resulta elemental y es objeto del

Ejercicio 2

Justifíquese que la relación de equipolencia de vectores es una relación de equivalencia.

3. LA NOCION DE VECTOR LIBRE

La relación de equipolencia recién establecida actúa sobre el conjunto de los vectores «ligados» del plano, como corresponde a su naturaleza de relación de equivalencia. La relación de equipolencia *clasifica* y *parte* al conjunto de los vectores del plano, V, en subconjuntos disjuntos o *clases de equipolencia,* formadas por todos los infinitos vectores equipolentes a uno dado.

Ejercicio 3

¿Qué propiedades de la relación de equipolencia permiten asegurar que dos vectores equipolentes a uno dado son equipolentes entre sí?

La clasificación y partición de la equipolencia ha dado lugar al conjunto cociente

$$\mathfrak{V} = V/\sim = \{\{(P, Q) \sim (R, S) \sim (T, V)\},\ \{(A, B) \sim (C, D)\},\ \ldots\}$$

Pues bien:

> Vector libre es cada una de las clases de vectores equipolentes.

Ejemplo 1

En la figura 4.7 se han representado vectores pertenecientes a dos clases de equipolencia distintas, que pertenecen al conjunto cociente que arriba se ha escrito.

Para representar a un vector libre se puede tomar uno cualquiera de los vectores de su clase. Denotaremos por

$$\{\overrightarrow{PQ}\}$$

o más simplemente

$$\overrightarrow{PQ}$$

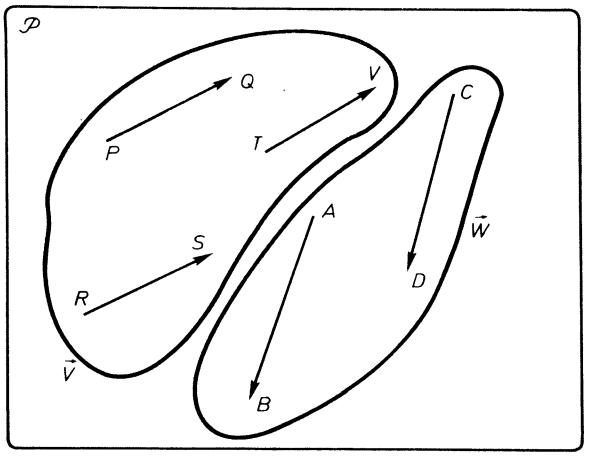


FIG. 4.7.

al vector libre que contiene al vector (P, Q). De hecho, y a condición de no confundirlos, se pueden representar por el mismo símbolo $\overrightarrow{PQ}$ tanto el vector «ligado» (P, Q) como el vector libre que le contiene. Aún más: cuando se denota un vector libre por una letra minúscula, la tipografía más cómoda y usual es utilizar una negrita; así $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ describen los dos vectores libres representados en la figura 4.7.

Con este ejemplo, y en espera de la construcción del plano afín en la próxima unidad, se intenta ayudar a comprender por qué se ha introducido el concepto de vector libre partiendo del de vector «ligado», con origen y extremos fijos.

Considérese una cuartilla de papel sobre la mesa, que se traslada paralelamente a sí misma hasta que ocupa la posición indicada con línea de puntos en la figura 4.8. Cada punto P de la cuartilla se moverá hasta una posición P', de manera que el vector (P, P') da una buena descripción de la transformación

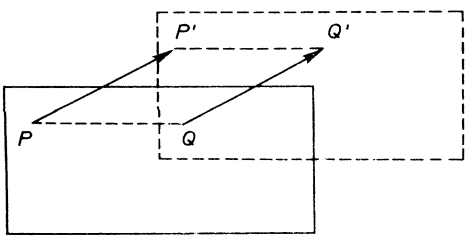


FIG. 4.8.

que ha sufrido el punto P. Para otro punto Q, se tendría el vector (Q, Q') etc. Así, esa traslación hace que los diferentes puntos describan rectas paralelas y que las distancias recorridas sean iguales. Ello supone que los cuadriláteros $PP'Q'Q$ son paralelogramos, lo que, a su vez, implica que los vectores (P, P') y (Q, Q') son equipolentes.

Entonces, esa traslación viene descrita «globalmente» en forma muy adecuada por el vector libre $\overrightarrow{PP'}$, que recoge —por así decir— todo lo común de los vectores «ligados» de su clase:

a) módulo = magnitud de la traslación;
b) dirección = fija la de la traslación;
c) sentido = el común a todos los «ligados» de su clase: de P a P'.

Una vez creado el conjunto de los vectores libres del plano, vamos a estructurarlo a continuación.

4. ADICION DE VECTORES LIBRES

En los desarrollos que siguen se va a hacer uso frecuente de esta

Proposición:

Fijado un vector libre $\overrightarrow{PQ}$, cada punto A del plano es origen de un único vector (A, B), perteneciente a la clase de equipolencia $\overrightarrow{PQ}$.

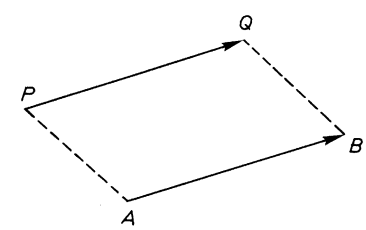


FIG. 4.9.

En efecto, puesto que $\overrightarrow{PQ}$ está formado por todos los vectores equipolentes a (P, Q), si se toma un punto A del plano, sólo existe un punto B, tal que el cuadrilátero $PQBA$ es un paralelogramo, lo que supone que $(A, B) \sim (P, Q)$, como se indica en la figura 4.9.

Ejercicio 4

La construcción anterior se ha realizado suponiendo que el punto A elegido no se halla alineado con P y Q. Efectúese la construcción correspondiente cuando A, P y Q están alineados.

Con la proposición establecida ya se está en condiciones de definir la adición de vectores libres.

Se toman dos vectores libres cualesquiera $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, dados por dos de sus representantes (P, Q) y (R, S). Se admite como representante de $\boldsymbol{v}$ el dado (P, Q) y se toma para representar a $\boldsymbol{w}$ el único representante de su clase con origen en Q, es decir, el vector (Q, T).

Se define vector-suma de los vectores libres $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ otro vector libre $\boldsymbol{t}$, uno de cuyos representantes es el vector (P, T), dibujado en la figura 4.10. Se escribe:

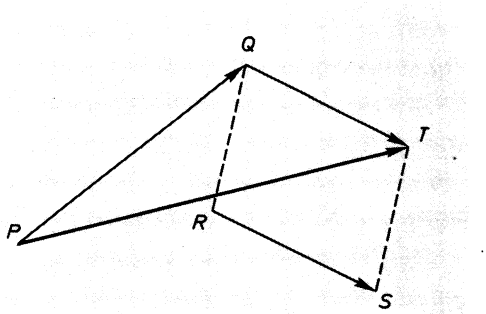


FIG. 4.10.

Representantes:

$$(P, Q) + (Q, T) = (P, T)$$

Vectores libres:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PT} \ ,$$

o bien

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{t}$$

Lo primero que se observa en la definición establecida es que para sumar dos vectores libres es necesario tomar un representante de cada uno de ellos. Puede surgir la duda de que si al tomar distintos representantes para los sumandos, el vector-suma sigue siendo el mismo, ya que si esto no ocurriera no se habría definido una operación. Es decir, ha de probarse que la adición de vectores libres es *uniforme,* o lo que es igual

> El vector-suma de dos vectores libres no depende de los representantes escogidos para operar.

En efecto, en la figura 4.11 se han dibujado dos representantes distintos del vector $\boldsymbol{v}$

$$(P, Q) \text{ y } (A, B) \in \boldsymbol{v}$$

siendo (Q, T) y (B, C) los representantes con orígenes en Q y en B del segundo sumando $\boldsymbol{w} \equiv \overrightarrow{RS}$

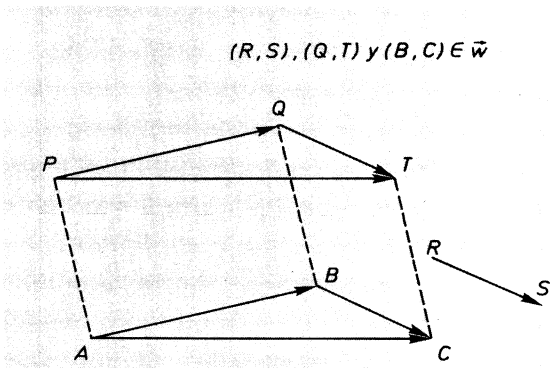


FIG. 4.11.

Sumemos, primero, usando unos de los representantes:

$$(P, Q)+(Q, T)=(P, T) \quad ; \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\overrightarrow{PT}$$

Ahora, realicemos la adición manejando otros representantes:

$$(A, B)+(B, C)=(A, C) \quad ; \quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\overrightarrow{AC}$$

Ha de justificarse que ambos resultados son el mismo. Es decir, que

$$(P, T) \sim (A, C)$$

o si se prefiere otra expresión, que

$$\overrightarrow{PT} \equiv \overrightarrow{AB}$$

Justificar sobre la figura 4.11 la equipolencia de (P, T) y (A, C) es elemental:

$$\left.\begin{array}{l}(P, Q) \sim (A, B) \Longrightarrow PQBA \text{ es paralelogramo} \\ (Q, T) \sim (B, C) \Longrightarrow QTCB \text{ es paralelogramo}\end{array}\right\} \Longrightarrow PA \,//\, TC \text{ y } PA = TC$$

$$\Downarrow$$

$$(P, T) \sim (A, C) \Longleftarrow PTCA \text{ es paralelogramo}$$

Ejercicio 5

Trácese una recta y sobre ella elíjanse cuatro puntos A, B, C y D, de manera que C se halle situado entre A y B. Obténgase un representante con origen en D, del vector suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{CD}$.

5. EL GRUPO ADITIVO DE LOS VECTORES LIBRES

Una vez justificada la uniformidad de la adición, es fácil demostrar que esa operación dota al conjunto de los vectores libres del plano con las siguientes propiedades:

I. Asociatividad:

$$\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{r}$$

II. Existencia del elemento neutro. Es el vector libre constituido por todos los vectores equipolentes al (A, A). Se representa por $\mathbf{0}$:

$$\forall\, \boldsymbol{a} \in \mathfrak{V},\quad \boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

III. Existencia de elementos opuestos:

$$\forall\, \boldsymbol{a} \in \mathfrak{V},\quad \exists^{*}(-\boldsymbol{a}) \in \mathfrak{V} \;/\; \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$$

Si $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$, su opuesto es $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{QP}$.

IV. Conmutatividad:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$$

Por cumplirse estas cuatro propiedades, la adición dota al conjunto de vectores libres del plano de estructura de grupo abeliano. Es decir:

$(\mathfrak{V}, +)$ es un grupo abeliano

Ejercicio 6

Compruébese gráficamente con un ejemplo la asociatividad de la adición de vectores libres.

Ejercicio 7

Demuéstrese la propiedad conmutativa de la suma de vectores libres del plano.

Ejercicio 8

Establézcase la diferencia de vectores, a partir de la propiedad III del grupo aditivo $(\mathfrak{V}, +)$.

6. PRODUCTO DE UN NUMERO REAL POR UN VECTOR

Se trata de establecer una ley de composición *externa* que haga corresponder a cada par del cartesiano $(R \times \mathfrak{V})$ un vector libre de $\mathfrak{V}$.

$$(R \times \mathfrak{V}) \xrightarrow{\cdot} \mathfrak{V}$$
$$(\lambda, \boldsymbol{v}) \xrightarrow{\cdot} \lambda \cdot \boldsymbol{v}$$

Supónganse un número real λ y un vector libre $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$, uno de cuyos representantes es (P, Q) (Fig. 4.12). Salvo en el caso del vector nulo, en el que $P \equiv Q$, el vector (P, Q) determina una recta.

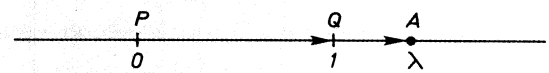


FIG. 4.12.

Si en esa recta se toma el punto P como origen y el módulo de (P, Q) como unidad de medida, con sentido positivo el del vector, a cada número real le corresponde un único punto sobre dicha recta. Sea A el punto correspondiente al real λ. Entonces, el producto externo del número real λ por el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector libre, uno de cuyos representantes es el vector (P, A).

De esta definición se desprende inmediatamente que el producto del número real 0 por cualquier vector libre es el vector $\mathbf{0}$.

Conviene advertir que la definición de producto externo establecida carece de sentido si el vector es nulo. Para este caso, cualquiera que sea el número real λ, se define:

$$\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Con ello queda establecido en todos los casos el producto de un número real por un vector libre, pudiéndose demostrar que la ley así definida es uniforme.

7. PROPIEDADES DEL PRODUCTO $R \times \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V}$

Se puede demostrar que el producto de números reales por vectores libres del plano tiene las siguientes propiedades:

$$\lambda, \mu \in R, \qquad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{V}$$

V. $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$

VI. $\lambda\cdot(v+w)=\lambda\cdot v+\lambda\cdot w$

VII. $(\lambda\mu)\cdot v=\lambda\cdot(\mu\cdot v)$

VIII. $1\cdot v=v$

8. CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

El conjunto de los vectores libres del plano ha resultado ser un grupo abeliano respecto de la adición. Junto a ello, el producto externo de los números reales por elementos de $\mathfrak{V}$ goza de las cuatro propiedades recién tabuladas. Para indicar esta estructura, se dice que:

> El conjunto de los vectores libres del plano tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

De otro modo,

> El conjunto de los vectores libres del plano es un espacio vectorial real.

La figura 4.13 esquematiza lo que se lleva dicho.

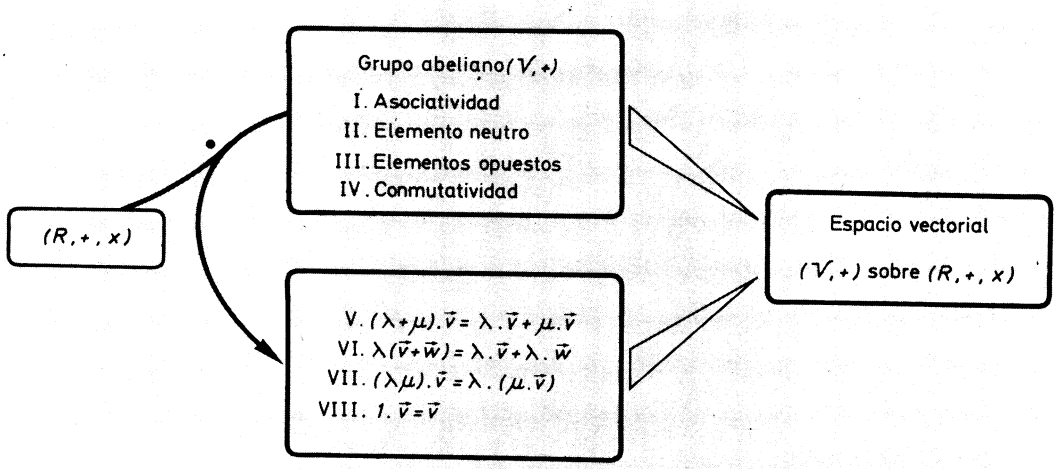


FIG. 4.13.

Pero esta estructura no queda reducida al caso de los vectores libres del plano que ha servido para introducirla, sino que está muy extendida en la Matemática, como se puede comprobar en los ejemplos y ejercicios que siguen.

Ejemplo 3

Los números complejos $a+bi$, con la operación adición, constituyen un grupo abeliano. Como por otra parte está definido el producto de un número real λ por el complejo $a+bi$,

$$\lambda \cdot (a+bi) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot bi \ ,$$

obteniéndose como resultado otro complejo, y este producto cumple las propiedades V a VIII, resulta:

> Los números complejos con la operación adición y el producto externo por números reales tiene estructura de espacio vectorial real.

Por esto, un número complejo, en este contexto, puede considerarse con toda propiedad un *vector*.

Ejercicio 9

Justifíquese que el producto de un número real por un complejo cumple las propiedades V a VIII.

Ejemplo 4

Se considera el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que dos. Denotemos V ese conjunto:

$$V = \{ax^2 + bx + c / a, b, c \in R\}$$

Respecto de la adición de polinomios, tal conjunto tiene estructura de grupo abeliano. (La justificación de esta estructura es objeto del ejercicio 10.)

Por lo que se refiere al producto de un número real por un polinomio de V,

$$\lambda \cdot (ax^2 + bx + c) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$$

es inmediato justificar que se cumplen las cuatro propiedades correspondientes a las cuatro últimas de la estructura de espacio vectorial. En consecuencia, se enuncia:

> El conjunto de los polinomios en x con coeficientes reales y grado menor o igual que dos es un espacio vectorial real.

Ejercicio 10

Demuéstrese que siendo V el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que dos, $(V, +)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 11

Descríbase cómo el conjunto de los números reales puede considerarse un espacio vectorial sobre sí mismo.

Ejercicio 12

Analícese concienzudamente esta cuestión: Un número real, ¿es un vector o un escalar? *

Utilizando el cuerpo de los números reales R, se considera el siguiente conjunto:

$$R^3 = R \times R \times R = \{(a, b, c) / a, b, c \in R\}$$

Sobre R^3 se define una adición del siguiente modo:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

y el producto de un número real por un elemento de R^3 de la siguiente forma:

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Con estas dos definiciones, el conjunto R^3 queda estructurado como espacio vectorial sobre R. Basta comprobar que es un grupo aditivo abeliano y que cumple las cuatro propiedades del producto por números reales.

Este ejemplo es similar al ya citado espacio vectorial de los números complejos, que no es otro que R^2, dado que un complejo es un par ordenado de números reales.

9. COMPONENTES DE UN VECTOR EN EL PLANO

En la figura 4.14, se fijan en el plano tres puntos P, Q y R, con la única condición de que no estén alineados, y se consideran los vectores

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \boldsymbol{u} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PR} \equiv \boldsymbol{v},$$

dos de cuyos representantes son, respectivamente, (P, Q) y (P, R).

* Se entiende por escalar un elemento del cuerpo sobre el que se construye un espacio vectorial.

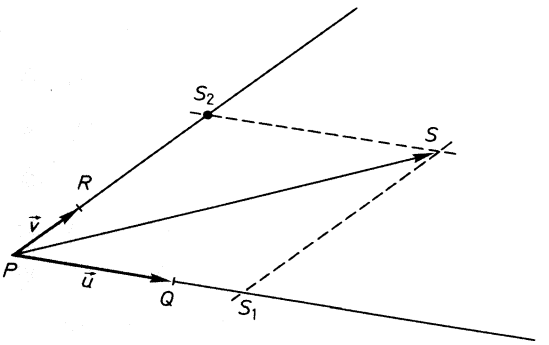


FIG. 4.14.

Cualquier otro vector $\boldsymbol{w}$ tiene un único representante (P, S) con origen en P. Si por el punto S se trazan paralelas a las rectas PR y PQ, la primera corta en S_1 a PQ y la segunda lo hace en S_2 a PR.

Observando la figura y recordando la definición de adición de vectores, se puede escribir:

$$\boldsymbol{w} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PS_1} + \overrightarrow{PS_2}$$

Ahora bien, $\overrightarrow{PS_1}$ es un vector de la misma dirección que $\overrightarrow{PQ}$, y se puede escribir

$$\overrightarrow{PS_1} = a \cdot \overrightarrow{PQ} \ ,$$

donde a es el número real correspondiente a la abscisa de S_1 sobre la recta PQ, cuando se toma P como origen y el módulo de $\overrightarrow{PQ}$ como unidad de medida. Por la misma razón,

$$\overrightarrow{PS_2} = b \cdot \overrightarrow{PR} \ ,$$

y en definitiva

$$\overrightarrow{PS} = a \cdot \overrightarrow{PQ} + b \cdot \overrightarrow{PR}$$

o lo que es igual

$$\boldsymbol{w} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$$

La expresión anterior es importante porque permite expresar cualquier vector libre del plano en función de dos de ellos solamente.

Los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ se dice que constituyen una *base del espacio vectorial,* y los números reales a y b se llaman *componentes* del vector $\boldsymbol{w}$ en dicha base. Adviértase que el vector $\boldsymbol{w}$ determina de forma única sus componentes, respecto de dicha base.

Recíprocamente, si se dan dos números reales (λ, μ), existe un solo vector cuyas componentes son los números dados; se trata del vector

$$\lambda \cdot \boldsymbol{u} + \mu \cdot \boldsymbol{v}$$

De lo anterior se deduce que la aplicación que a cada vector libre le hace corresponder sus componentes, respecto de la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, es una biyección entre el espacio vectorial de los vectores libres del plano y el conjunto $R \times R$.

Ejercicio 13

Trazando dos rectas perpendiculares y llamando P a su punto de corte, colóquense R y Q sobre cada una de las rectas, a distancia de P igual a 1 *cm. Represéntense los vectores cuyas componentes son* $(2, 3)$; $(-1, 1)$; $(-3, -5)$; $(0, -2)$.

Ejercicio 14

Hállese el vector suma de los dos primeros vectores del ejercicio anterior y compruébese que las componentes de éste son $(1, 4)$, *precisamente la suma de las componentes respectivas de cada uno de los sumandos.*

10. VECTORES EN EL ESPACIO

Se denota $\mathcal{E}$ el espacio ordinario, considerado como conjunto de puntos, y se forma el producto cartesiano

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} = \{(P, Q)/P \text{ y } Q \in \mathcal{E}\}.$$

Cada elemento de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ es un vector de origen P y extremo Q.

Lo mismo que se hizo en el plano, se define la relación de equipolencia de vectores que, al ser de equivalencia, induce una partición del conjunto $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ en clases de equivalencia, cada una de las cuales es un vector libre del espacio.

Ejercicio 15

De manera análoga a como se ha hecho en el plano, establézcase el grupo abeliano aditivo de los vectores libres del espacio de tres dimensiones.

Ejercicio 16

Defínase el producto externo de los números reales por vectores libres del espacio y establézcanse sus cuatro propiedades, tal y como se hizo al crear el espacio vectorial de dos dimensiones.

11. COMPONENTES DE UN VECTOR EN EL ESPACIO

De manera similar a como se ha hecho para los vectores libres del plano, se trabaja en el espacio vectorial de tres dimensiones. Sucede que aquí una base consta de tres vectores y, como consecuencia, un vector posee tres componentes.

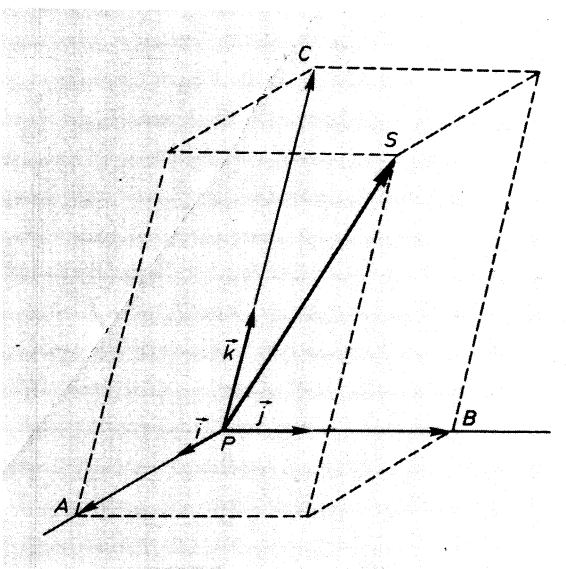


FIG. 4.15.

En la figura 4.15, el vector $\boldsymbol{t} \equiv \overrightarrow{PS}$ se descompone sobre las tres aristas del triedro que determina la base tridimensional $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de vectores libres. Así,

$$\boldsymbol{t} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

Pero

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = a \cdot \boldsymbol{i} \\ \overrightarrow{PB} = b \cdot \boldsymbol{j} \\ \overrightarrow{PC} = c \cdot \boldsymbol{k} \end{array}\right\} +$$

$$\boldsymbol{t} = a \cdot \boldsymbol{i} + b \cdot \boldsymbol{j} + c \cdot \boldsymbol{k}$$

De este modo, resulta que las componentes del vector $\boldsymbol{t}$, referidas a la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, forman la terna de números reales

$$(a, b, c).$$

Como dijimos en el caso del plano, aquí diremos también que la aplicación que hace corresponder a cada vector libre del espacio sus componentes, respecto de la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, es una biyección entre el espacio vectorial de tres dimensiones y el conjunto R^3.

Ejercicio 17

Siendo trirrectángulo el triedro de la base y tomando como módulo de los vectores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ *1 centímetro, dibújese el vector de componentes* $\boldsymbol{d}(3, 4, 12)$ *y también los vectores* $\boldsymbol{v}(3, 4, 0)$ *y* $\boldsymbol{w}(0, 0, 12)$. *Compruébese gráfica y analíticamente que* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.1

1. Cualquiera que sea r, según la definición de la relación,

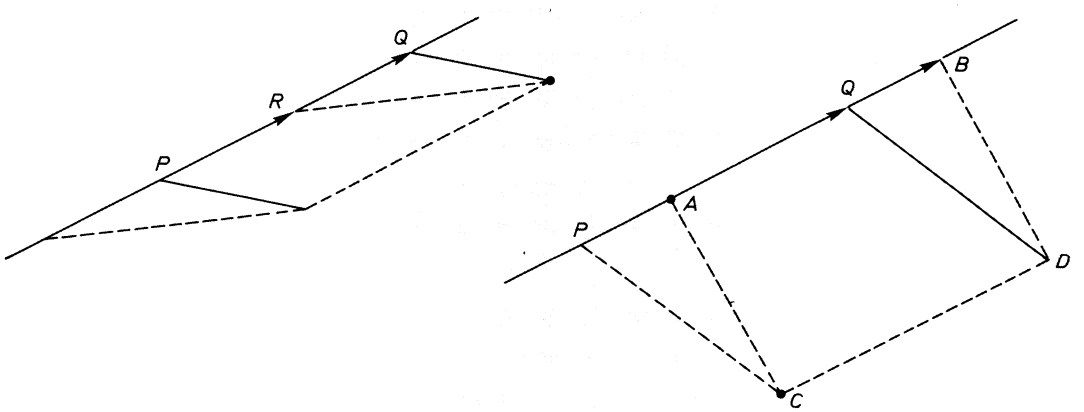
$$r \equiv r \iff r \,//\, r.$$

La simetría de la relación de paralelismo resulta inmediata.

2. La justificación gráfica de la reflexividad y simetría es clara. Respecto de la transitividad, es suficiente observar que si $(P, Q) \sim (R, S)$ y $(R, S) \sim (T, V)$, se puede formar un paralelogramo $PQTV$, o pasar de uno a otro, mediante dos paralelogramos.

3. La simetría y la transitividad.

4. Basta trazar una paralela a la recta PQ, tomar sobre ella un punto C, construir un vector $\overrightarrow{CD}$ equipolente a $\overrightarrow{PQ}$ y, luego, un vector con origen en A, equipolente a $\overrightarrow{CD}$ (Fig. 4.16).



5.

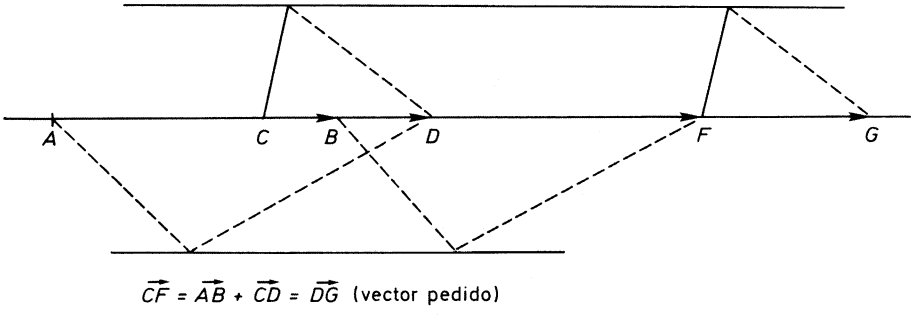


FIG. 4.17.

6.

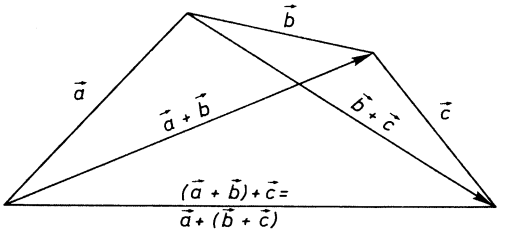


FIG. 4.18.

7. Dados los vectores PQ y PR (no supone pérdida de generalidad suponer que tienen el mismo origen), se puede trazar con origen en R un vector RS, equipolente a PQ o por Q un vector QT, equipolente a PR. Entonces, $PRSQ$ debe ser paralelogramo, igual que $PRTQ$. En definitiva, T debe coincidir con S, y la diagonal del paralelogramo, PS, es el vector suma $PR + PQ$, con lo que la suma es conmutativa.

8. Basta definir $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$.

9. Como un número real se puede considerar un complejo de segunda proyección nula, las propiedades V, VI, VII y VIII se verifican, pues:

V. $m(z_1 + z_2) = mz_1 + mz_2$ (no es sino un caso especial de la distributividad);

VI. $(m+n)z = m \cdot z + n \cdot z$ (la misma situación anterior);

VII. $m(nz) = (mn)z$ (resulta ser un caso particular de la asociatividad del producto de complejos).

VIII. $1 \cdot z = z$. Sólo expresa que el número real 1 (el complejo $1 + 0i$), es el elemento neutro para la multiplicación en el grupo de los complejos $\neq 0$.

10. La suma de polinomios de grado menor o igual que 2 es de grado menor o igual que dos, luego es *cerrada.*

La adición es asociativa, por serlo el anillo de los polinomios, de los que los de grado $\leqslant 2$ es un subgrupo aditivo.

El polinomio nulo pertenece al conjunto polinómico considerado.

Cada polinomio ax^2+bx+c (a, b y c números reales) admite un opuesto $-ax^2-bx-c$.

Finalmente, la adición es conmutativa, por serlo en el anillo de los polinomios.

11. $(R, +)$ es un grupo abeliano. Como hay definido un producto entre números reales y elementos del grupo $(R, +)$ —que no es más que el producto ordinario establecido en R—, que evidentemente cumple las cuatro propiedades V-VIII, se puede concluir que $(R, +)$ es un espacio vectorial sobre sí mismo.

12. Como elemento de un cuerpo que se utiliza como conjunto de multiplicadores para construir un espacio vectorial es un escalar. Pero el ejercicio anterior muestra que cada número real puede considerarse como vector. No existe contradicción alguna entre los dos puntos de vista. Es muy común que sobre un mismo conjunto vengan dadas distintas estructuras y cada elemento de ese conjunto, entonces, podrá ser considerado de forma distinta, según la estructura que se considere.

13.

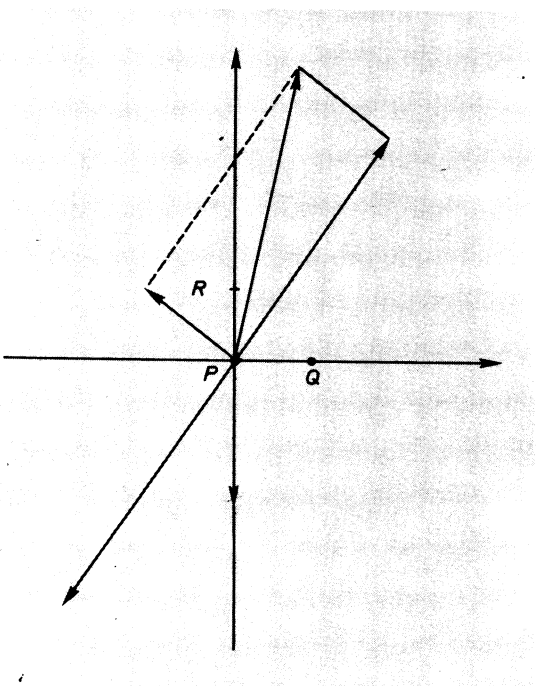


FIG. 4.19.

14. Está dibujado sobre la figura 4.19.

15. Basta seguir, punto por punto, lo realizado en el caso del plano.

16. Del mismo modo, este ejercicio se resuelve en la línea del anterior.

17.

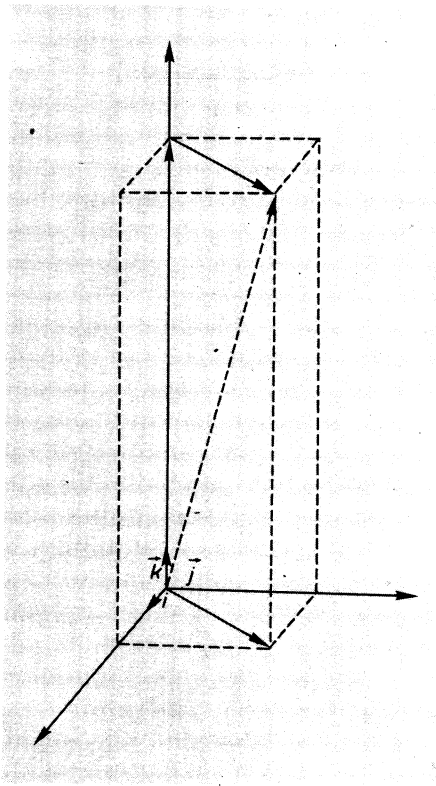


FIG. 4.20.

4.2

La estructura de espacio vectorial

1. AXIOMATICA DE UN ESPACIO VECTORIAL

En el capítulo precedente se han desarrollado y analizado algunas propiedades de dos espacios vectoriales particulares: el espacio vectorial de los vectores libres del plano y el espacio vectorial de los vectores libres del espacio.

También han quedado citados como ejemplos o ejercicios otros espacios vectoriales, como el de los polinomios en x sobre R, de grado menor o igual que dos.

Arrancando de las primeras propiedades y tomándolas como axiomas de la estructura de espacio vectorial, se van a deducir a continuación otros resultados válidos para cualquier espacio vectorial, en particular para los vectores libres del plano o del espacio. Nuestra actividad será así semejante a la que se ha dado en el desarrollo de la Matemática, que pasó de la concepción «sensible» del vector a establecer la estructura de espacio vectorial general.

AXIOMAS DE UN ESPACIO VECTORIAL REAL

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{r} \in \mathfrak{V} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathfrak{R}$

I.	Asociatividad $\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{r}$	$(\mathfrak{V}, +)$ es **grupo abeliano**
II.	Existencia de elemento neutro $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$	
III.	Elementos opuestos $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$	
IV.	Conmutatividad $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$	
V.	$(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\cdot\boldsymbol{v}+\mu\cdot\boldsymbol{v}$	Producto externo $R \times \mathfrak{V}$
VI.	$\lambda\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\lambda\cdot\boldsymbol{v}+\lambda\cdot\boldsymbol{w}$	
VII.	$(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{v})$	
VIII.	$1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$	

Siguiendo la manera normal de trabajar en matemáticas, una vez establecida una axiomática procede desarrollar el cuerpo de teoremas que de ella se deduce. He aquí algunos de los más inmediatos, deducidos de la axiomática de espacio vectorial.

2. TEOREMATICA INMEDIATA DE UN ESPACIO VECTORIAL

TEOREMA 1. Para todo número real a se verifica

$$a\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

En efecto: sea $\boldsymbol{x}$ un vector cualquiera. Entonces, por ser $\mathbf{0}$ el elemento neutro de $\mathfrak{V}$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}$$

de forma que

$$a\cdot\boldsymbol{x}=a\cdot(\boldsymbol{x}+\mathbf{0})=a\cdot\boldsymbol{x}+a\cdot\mathbf{0} \qquad \text{(axioma VI)}$$

y esta igualdad exige que

$$a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

por ser el elemento neutro único.

TEOREMA 2. Cualquiera que sea el vector $\boldsymbol{x}$ se verifica

$$0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Si a es un número real cualquiera, $a + 0 = a$. Por tanto,

$$a \cdot \boldsymbol{x} = (a + 0) \cdot \boldsymbol{x} = a \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x} \qquad \text{(axioma V)}$$

Así, pues, $0 \cdot \boldsymbol{x}$ debe ser el elemento neutro de $\mathfrak{V}$, es decir:

$$0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

TEOREMA 3. Si $a \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, entonces $a = 0$ ó $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Efectivamente, si a fuese cero, el teorema anterior exige que $a \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Suponiendo que $a \neq 0$, es posible multiplicar por $1/a$ y obtener

$$(1/a) \cdot (a \cdot \boldsymbol{x}) = (1/a) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

es decir,

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

TEOREMA 4. Si se representa por $-\boldsymbol{x}$ al vector opuesto del $\boldsymbol{x}$, se cumple que

$$(-1) \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$$

Para justificarlo, basta escribir:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \boldsymbol{x} = (1 + (-1)) \cdot \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{x}$$

Así, el elemento $(-1) \cdot \boldsymbol{x}$ es tal que sumado con $\boldsymbol{x}$ da el vector cero, luego es el opuesto de $\boldsymbol{x}$, como se pretendía demostrar.

3. COMBINACIONES LINEALES

Dados los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, se llama combinación lineal de los mismos con coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ al vector

$$a_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_r \cdot \boldsymbol{x}_r$$

Ejercicio 18

¿Por qué toda combinación lineal de vectores representa un vector?

Ejercicio 19

En el espacio vectorial R^3, *hállese el vector combinación lineal*

$$2\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$

donde $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ *y* $\boldsymbol{v}_3$ *son los vectores*

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, -2)$$
$$\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1)$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (1, -1, -1)$$

Ejercicio 20

En el espacio vectorial constituido por los números complejos sobre el cuerpo real, se consideran los dos vectores $1-3i$ *y* $2+10i$. *Escríbase el vector* $5-5i$ *como combinación lineal de los dos primeros.*

4. CONCEPTO DE DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Dados los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, se plantea el problema de obtener una representación del vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de ellos.

Como $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, cualquiera que sea el vector $\boldsymbol{x}$, siempre es posible obtener tal representación, pues basta escribir

$$0 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_r$$

que, evidentemente, es el vector $\mathbf{0}$.

Entonces, según lo anterior, sólo son posibles dos casos:

a) La única combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ que satisface

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_r\boldsymbol{x}_r = \mathbf{0}$$

es la que se obtiene para $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$.

b) Existe alguna combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, con coeficientes *no todos nulos,* que verifica

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_r\boldsymbol{x}_r = \mathbf{0}$$

En el caso *a)* se dice que los vectores $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ son *linealmente independientes,* o que constituyen un *sistema libre.*

En el caso *b)* se dice que son linealmente dependientes.

En el espacio vectorial de los vectores libres del plano considérense los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ dados por sus componentes respecto de una base

$$\boldsymbol{u}=(1, 2) \quad ; \quad \boldsymbol{v}=(-2, -3) \quad ; \quad \boldsymbol{w}=(0, -1)$$

Formando la combinación lineal

$$a\cdot\boldsymbol{u}+b\cdot\boldsymbol{v}+c\cdot\boldsymbol{w}=a\cdot(1, 2)+b\cdot(-2, -3)+c\cdot(0, -1)=(0, 0)$$

se llega a que

$$(a-2b,\ 2a-3b-c)=(0, 0).$$

Como aparte de la solución obvia $a=b=c=0$ existe la solución $a=2$, $b=c=1$, los tres vectores dados son *linealmente dependientes.*

Ejercicio 21

Obténganse otras dos soluciones distintas para la combinación lineal del ejemplo 6.

En el mismo espacio vectorial del ejemplo 6, considérense los vectores $\boldsymbol{u}=(1, -1)$, $\boldsymbol{v}=(2, 3)$.

Para que $a\cdot\boldsymbol{u}+b\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ debe ser

$$a\cdot(1, -1)+b\cdot(2, 3)=(0, 0)$$

es decir,

$$(a+2b, -a+3b)=(0, 0)$$

o sea

$$\begin{aligned} a+2b&=0\\ -a+3b&=0\end{aligned}$$

Este sistema no admite otra solución distinta de $a=b=0$. Por tanto, los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son *linealmente independientes,* ya que la única combinación lineal igual al vector nulo es la que tiene todos los coeficientes nulos.

A la vista de los dos ejemplos anteriores, y recordando el espacio vectorial de los números complejos sobre R, es inmediato decir que los vectores

$1+2i$, $-2-3i$ y $-i$ son linealmente dependientes, mientras que los vectores $1-i$ y $2+3i$ son linealmente independientes.

Ejercicio 22

Compruébese que los vectores $1+i$ *y* $-5-5i$ *son linealmente dependientes.*

Ejercicio 23

En el espacio vectorial de los polinomios en x con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, dígase si son o no linealmente independientes los vectores

$$2 \quad ; \quad -7+x \quad ; \quad 1-x-x^2$$

Ejercicio 24

En el mismo espacio vectorial del ejercicio anterior, dígase lo mismo para los vectores

$$x^2-x+1 \quad ; \quad x^2+3 \quad ; \quad 2x+4.$$

Ejercicio 25

Si los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ *son linealmente independientes, ¿cómo es cualquier conjunto de vectores extraídos de entre aquéllos?*

Ejercicio 26

Si a un conjunto de vectores linealmente dependientes se le añade un nuevo vector, ¿cómo es el conjunto resultante? Razónese.

5. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL. DIMENSION

Base de un espacio vectorial es todo conjunto de vectores del espacio que verifican estas dos condiciones:

1. Los vectores de la base son linealmente independientes.
2. Cualquier vector del espacio se puede poner como combinación lineal de los de dicho conjunto.

Ejemplo 9

En el espacio vectorial de los vectores libres del plano una base está constituida por dos vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con tal de que P, Q y R no estén alineados, y ya se vio en el capítulo anterior como todo vector del plano era combinación lineal de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo coeficientes de dicha combinación lineal las componentes del vector respecto de la base.

Ejemplo 10

En el espacio vectorial de los números complejos una base está constituida por los dos vectores 1 e i, ya que son linealmente independientes y cualquier complejo $a+bi$ es combinación lineal de 1 e i, pues

$$a+bi=a\cdot 1+b\cdot i$$

De igual manera, en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 una base está constituida por los polinomios 1, x y x^2.

La importancia del concepto de *base* radica en el hecho de que cualquier vector del espacio vectorial se puede poner como combinación lineal de los de la base. En el espacio vectorial de los vectores libres del plano, todos se obtienen como combinación lineal de tan sólo dos, que constituyan una base.

Además, la manera de representar a cada vector es única. En efecto, si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son los vectores de una base en el espacio vectorial de los vectores libres del pano, y $\boldsymbol{w}$ es un vector cualquiera, la condición 2 permite escribir

$$\boldsymbol{w}=a\cdot\boldsymbol{u}+b\cdot\boldsymbol{v}$$

Si existiera otra forma de escribir $\boldsymbol{w}$ en función de $\boldsymbol{u}$ y de $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{w}=c\cdot\boldsymbol{u}+d\cdot\boldsymbol{v}$$

restando ambas representaciones se obtendría

$$\mathbf{0}=(a-c)\cdot\boldsymbol{u}+(b-d)\cdot\boldsymbol{v}$$

Como los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son linealmente independientes por formar una base, la única representación de $\mathbf{0}$ es la que tiene todos los coeficientes nulos, luego

$$a=c \quad \text{y} \quad b=d$$

por lo que el vector $\boldsymbol{w}$ es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de una sola forma. Es decir, $\boldsymbol{w}$ determina de manera única los dos números a y b, que se llaman sus componentes respecto de la base considerada.

El razonamiento que se acaba de hacer es general, y válido para cualquier espacio vectorial.

Ejercicio 27

Demuéstrese que en el espacio vectorial de los números complejos sobre los reales, los dos vectores

$$1-2i \quad \text{y} \quad 3+2i$$

forman una base, y obténganse las componentes del vector $5-i$ *respecto de la misma.*

Ejercicio 28

Si los vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ *y* $\boldsymbol{x}_3$ *forman una base de los vectores libres en el espacio, hállense las componentes del vector* $\boldsymbol{x}_i$, $i=1, 2, 3$ *en dicha base.*

Ejercicio 29

En el espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, obténganse las componentes del vector

$$1-2x+x^2 \ ,$$

respecto de la base constituida por los vectores

$$1+x \ , \quad 1-x \ , \quad x^2$$

Al buscar distintas bases de un determinado espacio vectorial, sucede que todas las halladas están formadas por el mismo número de vectores. Se demuestra que este resultado es válido de modo general; por ello, se puede definir:

> *Dimensión* de un espacio vectorial es el número de vectores que constituyen una cualquiera de sus bases.

Ejemplo 11

Todas las bases que se puedan encontrar en el plano vectorial están formadas por dos vectores: la *dimensión* de $\mathcal{V}$ es 2; por esta razón, en adelante, lo denotaremos V_2.

Todas las bases que pueden hallarse en V_3 tienen tres vectores: la dimensión de V_3 es 3.

Ejemplo 12

El espacio vectorial de los números complejos sobre R es de dimensión 2, porque todas sus bases tienen dos elementos.

El espacio vectorial de los polinomios en x sobre R, de grado menor o igual que 2, es de dimensión 3, ya que todas sus bases están formadas por *tres* polinomios.

Ejercicio 30

¿Qué dimensión tiene el espacio vectorial de los polinomios en la indeterminada x, con coeficientes reales, de grado menor o igual que 1? Dígase una base del mismo.

6. ISOMORFISMO ENTRE V_2 Y R^2

La introducción de una base en un espacio vectorial V_2 (de dimensión 2) ha hecho posible asignar de manera única a cada vector $\boldsymbol{x}$ un par de números reales a, b que son sus componentes respecto a la base fijada $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

$$\boldsymbol{x} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$$

Como ya se ha visto, $R^2 = R \times R$ es un espacio vectorial sobre R, también bidimensional, pues una base es $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Con estas premisas es posible establecer una aplicación de V_2 sobre R^2 de a siguiente forma:

a) Se elige una base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ en V_2.
b) Cada $\boldsymbol{x} \in V_2$ se escribe de forma única

$$\boldsymbol{x} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$$

c) El par (a, b) es un elemento de R^2.
d) Al vector $\boldsymbol{x} \in V_2$ se le hace corresponder $(a, b) \in R^2$.

Se tiene así una aplicación entre dos espacios vectoriales, siendo muy fácil justificar que se trata de una biyección. Para ello basta ver que la aplicación es inyectiva y exhaustiva.

Es inyectiva, pues si dos vectores de V_2 dan la misma imagen (a, b) es porque tienen las mismas componentes y, por tanto, son vectores iguales.

Es exhaustiva, pues tomando cualquier elemento de R^2, por ejemplo el (m, n), el vector $m \cdot \boldsymbol{u} + n \cdot \boldsymbol{v}$ se aplica sobre (m, n).

Representemos por f la aplicación anterior

$$f: V_2 \longrightarrow R^2$$
$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \longrightarrow f(x) = (a, b)$$

Si se toman dos vectores, el $\boldsymbol{x}$ anterior, y otro $\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}$, el vector suma $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ tiene como componentes respecto de la base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ la suma de las componentes respecto de la base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ la suma de las componentes de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, ya que

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(a+c)\cdot\boldsymbol{u}+(b+d)\cdot\boldsymbol{v}$$

Por tanto:

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(a+c, b+d)=(a, b)+(c, d)=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$$

Con razonamiento totalmente análogo, si λ es un número real y $\boldsymbol{x}$ un vector, $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$, las componentes de $\lambda\boldsymbol{x}$ son $(\lambda a, \lambda b)$, de modo que

$$f(\lambda\boldsymbol{x})=(\lambda a, \lambda b)=\lambda\cdot(a, b)=\lambda f(\boldsymbol{x})$$

Resumiendo: La biyección establecida entre V_2 y R^2 satisface

$$\boxed{\begin{array}{c} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\ f(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x}) \end{array}}$$

Por cumplir estas dos condiciones se dice que f es un *isomorfismo* de V_2 sobre R^2.

La importancia de este isomorfismo se comprende mejor si se piensa que su efecto hace que podamos disponer de un espacio vectorial «modelo», el espacio R^2, entre todos los bidimensionales. Para operar con vectores de V_2 lo usual es operar con las componentes de los mismos respecto de una base, y estas componentes no son sino elementos de R^2. El poder proceder así es consecuencia de que la biyección f «respeta» las dos operaciones básicas del espacio vectorial, que son la suma de vectores y el producto por escalares.

Se comprende que lo mismo se hubiera podido hacer para V_3 y R^3. Este isomorfismo es el que permite «identificar» un vector con sus componentes, como se ha estado haciendo en ejemplos anteriores, sin decirlo de manera explícita.

Ejercicio 31

Se pretende establecer el isomorfismo anterior entre el espacio vectorial de los polinomios en x, de grado menor o igual que 2, con coeficientes en R y R^3. ¿Qué es lo primero que ha de hacerse para poder establecer dicho isomorfismo?

Ejercicio 32

Eligiendo la base $2-x$, $1+x^2$, x, ¿qué elemento de R^3 corresponde a cada uno de los siguientes vectores

a) x^2+1 ; *b)* $1-x-x^2$; *c)* 3.

7. CAMBIO DE BASE EN UN ESPACIO VECTORIAL

Sea V_2 un espacio vectorial de dimensión 2, y sean $B_1 = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, $B_2 = \{\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'\}$ dos bases del mismo.

Sea $\boldsymbol{x}$ un vector, de componentes (a, b) en la primera base, (a', b') en la segunda. Entonces

$$\boldsymbol{x} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v} = a' \cdot \boldsymbol{u}' + b' \cdot \boldsymbol{v}' \qquad [1]$$

¿Qué relación existe entre (a, b) y (a', b')? Para contestar a la pregunta, nótese que al ser B_2 una base, los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pueden expresarse en términos de los de B_2

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \alpha_1 \boldsymbol{u}' + \alpha_2 \boldsymbol{v}' \\ \boldsymbol{v} &= \beta_1 \boldsymbol{u}' + \beta_2 \boldsymbol{v}' \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

y sustituyendo en la expresión [1],

$$\boldsymbol{x} = a(\alpha_1 \boldsymbol{u}' + \alpha_2 \boldsymbol{v}') + b(\beta_1 \boldsymbol{u}' + \beta_2 \boldsymbol{v}') \qquad [3]$$

es decir,

$$\boldsymbol{x} = (a\alpha_1 + b\beta_1)\boldsymbol{u}' + (a\alpha_2 + b\beta_2)\boldsymbol{v}' \qquad [3']$$

Como por otra parte

$$\boldsymbol{x} = a'\boldsymbol{u}' + b'\boldsymbol{v}' \qquad [4]$$

y la expresión de un vector en términos de una base es única, las dos expresiones [3'] y [4] han de ser iguales, por lo que

$$\left.\begin{aligned} a' &= a\alpha_1 + b\beta_1 \\ b' &= a\alpha_2 + b\beta_2 \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

que es la relación buscada.

Ejemplo 13

En el espacio vectorial R^2 obténganse las ecuaciones del cambio de base para pasar de B_1 $\{(1, 0), (0, 1)\}$, a la base B_2 $\{(1, 2), (-1, 1)\}$.

Lo único que se necesita es hallar las componentes de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respecto de B_2:

$$(1, 0) = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(-1, 1) = (\alpha_1 - \alpha_2,\ 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

De esta igualdad de vectores resultan las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ 0 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\alpha_1 = 1/3 \quad \text{y} \quad \alpha_2 = -2/3.$$

De forma análoga,

$$(0, 1) = \beta_1(1, 2) + \beta_2(-1, 1) = (\beta_1 - \beta_2,\ 2\beta_1 + \beta_2)$$

con lo que se consigue

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \beta_1 - \beta_2 \\ 1 &= 2\beta_1 + \beta_2 \end{aligned}\right\},$$

cuya solución es

$$\beta_1 = 1/3 \quad \text{y} \quad \beta_2 = 1/3.$$

Las ecuaciones del cambio de base son

$$\left.\begin{aligned} a' &= a \cdot (1/3) + b \cdot (1/3) \\ b' &= a \cdot (-2/3) + b \cdot (1/3) \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Así, para hallar, por ejemplo, las componentes respecto de B_2 del vector $(3, 5)$, como

$$(3, 5) = 3 \cdot (1, 0) + 5(0, 1)$$

quiere decirse que las componentes de dicho vector respecto de B_1 son 3 y 5, por lo que basta aplicar las fórmulas [6]:

$$\begin{aligned} a' &= 3 \cdot (1/3) \quad + 5 \cdot (1/3) = 8/3 \\ b' &= 3 \cdot (-2/3) + 5 \cdot (1/3) = -13 \end{aligned}$$

Ejercicio 33

Tomando las mismas dos bases del ejemplo 13, *¿cuáles son las ecuaciones que dan el cambio de base de la B_2 a la B_1?*

Ejercicio 34

En el espacio vectorial de los números complejos sobre el cuerpo real, obténganse las expresiones que permiten pasar de la base B_1 a la B_2, así como de la B_2 a la B_1, siendo

$$B_1 = \{1 + i, 2\} \quad ; \quad B_2 = \{2 + i, 2 - i\}$$

8. SUBESPACIOS DE UN ESPACIO VECTORIAL

Terminemos dando un concepto fundamental.

Sea V un espacio vectorial y S un *subconjunto* de V

$$S \subset V$$

Si la suma de dos elementos cualesquiera de S y el producto de un número real por un elemento de S son vectores que siguen perteneciendo a S, se dice que S es un *subespacio vectorial* de V. Las dos condiciones dadas pueden resumirse en una sola:

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ es subespa-} \\ \text{cio de } V \end{array}\right\} \iff \forall\, x, y \in S \Longrightarrow ax + by \in S, \quad \forall a, b \in R$$

Ejercicio 35

Demuéstrese que esta condición única es equivalente a las dos dadas antes.

Ejemplo 14

En el espacio vectorial de los números complejos sobre el cuerpo real, los complejos de la forma

$$bi$$

es decir, los imaginarios puros, forman un subespacio vectorial, pues dados dos cualesquiera,

$$mi \quad \text{y} \quad ni$$

una combinación lineal de los mismos

$$a \cdot mi + b \cdot ni = (am + bn)i$$

vuelve a ser un complejo imaginario puro.

Ejercicio 36

Demuéstrese que son subespacios vectoriales los siguientes:

a) *En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, el conjunto de todos los polinomios cuyo término independiente es cero. ¿Qué dimensión tiene este subespacio?*

b) *En cualquier espacio V, el subconjunto formado por todos los vectores que son combinación lineal de tres fijos,* x_1, x_2 *y* x_3.

El ejemplo más inmediato de subespacio de un espacio vectorial, viene dado por los «múltiplos» de un vector $\boldsymbol{x} \in V$

$$S = \{a\boldsymbol{x} / a \in R,\ \boldsymbol{x} \text{ vector fijo de } V\}$$

Si $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, todo vector de S es combinación lineal de $\boldsymbol{x}$; y como la familia reducida al único vector $\boldsymbol{x}$ es linealmente independiente, resulta que $\{\boldsymbol{x}\}$ es una base de S. La dimensión del subespacio S es 1.

> Un subespacio de dimensión 1 se llama *recta vectorial.*

Ejercicio 37

Si $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, el conjunto $S = \{a\boldsymbol{x} / a \in R\}$ se reduce al único vector $\mathbf{0}$. ¿Es un subespacio este subconjunto? Razónese.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.2

18. El producto de un número real por un vector es un vector, y la suma de un número finito de vectores es un vector, por lo que el resultado de una combinación lineal de vectores en un vector.

19. $(3, 2, -8)$.

20. $5 - 5i = \dfrac{15}{4}(1 - 3i) + \dfrac{5}{8}(2 + 10i)$.

21. $(a, b, c) = (4, 2, 2)$; $(a, b, c) = (3, 3/2, 3/2)$. Obsérvese que todas las soluciones se obtienen de una de ellas, multiplicando por un mismo número los valores de a, b y c.

22. Como $-5 - 5i = -5 \cdot (1 + i)$, se verifica que

$$5(1 + i) + (-5 - 5i) = 0$$

y esta es una representación del cero, con coeficientes no todos nulos.

23. Son linealmente independientes. Pues si existiera una relación de la forma

$$a \cdot 2 + b(-7 + x) + c(1 - x - x^2) = 0 \quad \text{(polinomio nulo)}$$

debería verificarse

$$\begin{aligned} 2a - 7b + c &= 0 \\ b - c &= 0 \\ -c &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Como la única representación de cero es la trivial, los vectores son linealmente independientes.

24. Son linealmente dependientes, pues

$$2 \cdot (x^2 - x + 1) - 2(x^2 + 3) + (2x + 4) = 0.$$

25. También es una familia libre. Pues si no lo fuera, $\mathbf{0}$ admitiría una representación no trivial, es decir, con coeficientes no todos nulos. Añadiendo los vectores que hubiéramos quitado, todos ellos con coeficientes cero, obtendríamos una representación no trivial de $\mathbf{0}$ en los vectores $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, lo cual es imposible, por haberlos supuesto linealmente independientes.

26. Sigue siendo de vectores linealmente dependientes. Para verlo, tómese una representación no trivial de cero, que existe por la hipótesis de dependencia lineal, y añádase a la misma el nuevo vector con coeficiente cero.

27. Desde luego son linealmente independientes. Para ver que cualquier complejo puede ponerse como combinación lineal de ambos, basta ver que si se escribe

$$u + vi = a(1 - 2i) + b(3 + 2i)$$

siempre es posible obtener a y b para cualesquiera valores de u y de v. Es decir, el sistema

$$\begin{aligned} u &= a + 3b \\ v &= -2a + 2b \end{aligned}$$

debe tener siempre solución. Resolviendo por el método de reducción, por ejemplo, se obtiene

$$a = (2u - 3v)/8 \quad ; \quad b = (2u + v)/8$$

y siempre existe solución. En nuestro caso particular, las componentes de $5 - i$ son

$$(13/8,\ 9/8).$$

28. $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 0)$; $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 0)$; $\boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1)$.

29. $(-1/2, 3/2, 1)$.

30. La dimensión es 2. Una base es la formada por los polinomios

$$1\ ,\ x.$$

31. Hay que elegir una base en el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos.

32. *a)* $(0, 1, 0)$;
b) $(1, -1, 0)$;
c) $(3/2, 0, 3/2)$.

33. Este caso resulta muy fácil porque es inmediato ver cuáles son las componentes de los vectores de B_2 en términos de B_1, y se obtiene

$$a_1 = a'_1 - a'_2$$
$$a_2 = 2a'_1 + a'_2$$

34. De B_1 a B_2:

$$a'_1 = (3/4) \cdot a_1 + (1/2) \cdot a_2$$
$$a'_2 = (-1/4) \cdot a_1 + (1/2) \cdot a_2$$

De B_2 a B_1:

$$a_1 = a'_1 - a'_2$$
$$a_2 = (1/2) \cdot a'_1 + (3/2) \cdot a'_2$$

35.

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^a & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S \\ 2.^a & \boldsymbol{x} \in S,\ a \in R \Longrightarrow a\boldsymbol{x} \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow [(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S) \wedge (a, b \in R) \Longrightarrow \Longrightarrow a \cdot \boldsymbol{x} + b \cdot \boldsymbol{y} \in S].$$

En efecto: Dados $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, $a, b \in R$ por la propiedad 2, $a\boldsymbol{x} \in S$ y $b\boldsymbol{y} \in S$; y, por la 1, $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in S$, que es lo que se quería demostrar.

Recíprocamente:

$$[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S) \wedge (a, b \in R)] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S \\ \boldsymbol{x} \in S,\ a \in R \Longrightarrow a \cdot \boldsymbol{x} \in R \end{array}\right.$$

Puesto que, dados dos vectores, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ y dos números reales a, b, la combinación lineal $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in S$, si se toman $a = b = 1$, se obtiene

$$1 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S \ ;$$

y si se escogen un a cualquiera y un $b = 0$, resulta:

$$a \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{y} = a \cdot \boldsymbol{x} \in S$$

36. *a)* El conjunto de polinomios es

$$S = \{ax^2 + bx / a, b \in R\}.$$

Dados dos elementos de S y dos números reales m, n, la combinación lineal

$$m(ax^2 + bx) + n(a'x^2 + b'x) = (ma + na')x^2 + (mb + nb')x$$

es, de nuevo, un polinomio sin término independiente; por tanto, pertenece a S, y S es un subespacio. Como cualquier polinomio de S se escribe como combinación lineal de los dos vectores

$$x^2 \ , \ x$$

y éstos son independientes, la base tiene dos elementos y S es de dimensión 2.

b) El conjunto S es ahora

$$S = \{ a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3 / a, b, c \in R \}.$$

Cualquier combinación lineal de dos vectores de S, con coeficientes m y n, se escribe:

$$m(a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3) + n(a'\boldsymbol{x}_1 + b'\boldsymbol{x}_2 + c'\boldsymbol{x}_3) =$$
$$= (ma + na')\boldsymbol{x}_1 + (mb + nb')\boldsymbol{x}_2 + (mc + nc')\boldsymbol{x}_3$$

y vuelve a ser una combinación lineal de vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, y, por tanto, pertenece a S. Entonces, S es subespacio de V.

37. Claramente, $\mathbf{0}$ cumple que cualquier combinación de vectores,

$$a \cdot \mathbf{0} + b \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \{ \mathbf{0} \},$$

luego se trata de un subespacio vectorial.

4.3

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. De los siguientes conjuntos de funciones reales, con la operación suma y producto por escalares definidas en la forma usual, dígase cuáles tienen estructura de espacio vectorial:

a) $\{f/f(x)=0 \text{ si } x<0\}$;
b) $\{f/f(x)=1 \text{ si } x>0\}$;
c) $\{f/f(-x)=f(x)\}$.

2. Demuéstrese que si una familia de vectores contiene al $\mathbf{0}$, los vectores son linealmente dependientes.

3. Pruébese que en el espacio vectorial R^3 el vector $(0, -6, 6)$ es combinación lineal de los vectores $(2, 1, 1)$, $(1, 2, -1)$ y $(-4, 1, -5)$. ¿Constituyen estos tres últimos una base de R^3?

4. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que dos vectores (p, q) y (r, s) de R^2 formen una base del espacio es que se verifique

$$ps - qr \neq 0.$$

5. En el espacio vectorial de los complejos sobre el cuerpo real, dígase si son ciertas las siguientes caracterizaciones de una base:

a) dos complejos forman base, si su cociente es imaginario puro;
b) dos complejos forman base si su producto es un número real, sin ser ellos reales;
c) dos complejos forman base si su cociente es real, sin serlo ellos.

6. Demuéstrese que en el espacio vectorial R^3 los vectores

$$(a_1, a_2, a_3)$$

tales que a_1, a_2, a_3 es una progresión aritmética, forman un subespacio. ¿De qué dimensión?

7. Demuéstrese que en el espacio vectorial de los polinomios en x con coeficientes reales, de grado menor o igual que 2, los polinomios

$$1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$$

forman una base, y encuéntrense las componentes, respecto de la misma, de los polinomios

$$1,\ x,\ x^2.$$

8. En el mismo espacio vectorial del ejercicio anterior, se consideran los polinomios que admiten como raíces 1 y 2. Pruébese que todos ellos forman un espacio vectorial de dimensión 3.
(Sugerencia: Recuérdese el teorema de Ruffini y factorícese un tal polinomio.)

9. Se llama matriz cuadrada de orden 2 a un cuadro de números reales

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Definiendo la suma de dos matrices cuadradas de orden 2 en la forma

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}+n_{11} & m_{12}+n_{12} \\ m_{21}+n_{21} & m_{22}+n_{22} \end{pmatrix}$$

y el producto de un número real por una matriz

$$a \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am_{11} & am_{12} \\ am_{21} & am_{22} \end{pmatrix},$$

demuéstrese que el conjunto de matrices cuadradas reales de orden 2 es un espacio vectorial sobre R. ¿Qué dimensión tiene este espacio? Encuéntrese una base del mismo.

10. Un espacio vectorial puede construirse sobre otro cuerpo distinto del real. Teniendo en cuenta este hecho se pregunta:

1) El conjunto de los números racionales, ¿es espacio vectorial sobre el cuerpo racional?
2) El conjunto de números reales, ¿es un espacio vectorial sobre el cuerpo racional?
3) El conjunto de los números complejos, ¿es un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo? ¿De qué dimensión? ¿Qué consecuencia se saca de la respuesta?

11. Se considera en R^3 el conjunto de todos los vectores (x, y, z) tales que

$$2x - 3y + z = 0$$

Demuéstrese que tales vectores forman un espacio vectorial, subespacio de R^3, de dimensión 2, y obténgase una base del mismo.

12. En R^3 se considera el conjunto de vectores (x, y, z) definido así:

$$S = \{(x, y, z)/(2x - y + z = 0) \wedge (x + y + z = 0)\}$$

Demuéstrese que el subconjunto S es un subespacio de R^3 de dimensión 1 (recta vectorial) y hállese una base del mismo.

13. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1, hállense las ecuaciones del cambio de base para pasar de la base $\{1 + x,\ 1 - x\}$ a la base $\{x,\ x + 2\}$.

14. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, se consideran aquellos polinomios cuya derivada en $x = 0$ es nula. Demuéstrese que forman un subespacio vectorial de dimensión 2, y hállese una base del mismo.

15. Demuéstrese que cualquiera que sea el número $a \neq 0$, los tres vectores de R^3

$$(0, a, a) \quad ; \quad (a, 0, a) \quad ; \quad (a, a, 0)$$

son linealmente independientes y constituyen, por tanto, una base del espacio.

16. Obténgase en R^3 una base con las siguientes condiciones:

a) La recta vectorial que contiene a cada vector de la nueva base debe contener a un vector de la antigua.

b) En la nueva base, las componentes del vector $(-2, 3, 5)$ deben ser $(1, 1, 1)$.

Demuéstrese que la nueva base queda determinada por esas dos condiciones (excepto en el orden en que se tomen los vectores).

17. Se dice que dos subespacios S y T de un espacio vectorial V son suplementarios si todo vector del espacio puede ponerse como suma de un vector del primer subespacio y un vector del segundo subespacio, y se escribe

$$V = S + T$$

Si además $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V es suma directa de los subespacios S y T, y se denota

$$V = S \oplus T$$

Demuéstrese: Si V es suma directa de S y T, cada vector de V se puede expresar de forma única como suma de un vector de S y otro de T.

En el caso de R^3, obténgase una descomposición del mismo en suma directa (hay muchas...).

18. Obténganse las ecuaciones del cambio de la base B_1 a la B_2 en el espacio R^2, siendo

$$B_1\colon\ (4, -3),\ (1, 2)\ \cdot;\quad B_2\colon\ (1, 1),\ (-2, 2).$$

19. Si V es un espacio vectorial y S un subespacio del mismo, defínase la relación siguiente entre vectores de V

$$\boldsymbol{x}\, R\, \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in S.$$

Demuéstrese que la relación R es de equivalencia, y que la clase de equivalencia que contiene a un vector $\boldsymbol{z}$ se obtiene sumando $\boldsymbol{z}$ a todos los vectores de S por lo que se puede representar dicha clase con la notación

$$\boldsymbol{z} + S$$

Pruébese que la única clase de equivalencia que es subespacio de V es la clase $\mathbf{0} + S$, formada por todos los vectores de S.

4.4

Autoevaluación A-4

1. Un vector libre en el plano es

a) un segmento orientado;
b) una clase de equipolencia de vectores «ligados»;
c) el canónico de infinitos vectores fijos;
d) el conjunto cociente de la relación de equipolencia.

2. Dos rectas paralelas en el plano vectorial son

a) aquellas que se cortan en el punto impropio;
b) dos elementos equivalentes de una clase de paralelismo;
c) una única dirección;
d) la dirección que determina un vector libre.

3. Dirección en el plano es

a) cada una de las clases de equivalencia de la relación de paralelismo;
b) una característica de un vector ligado;
c) el conjunto de los dos sentidos de recorrido;
d) el conjunto de todas las paralelas.

4. La adición de vectores libres del plano

a) es una ley de composición externa;
b) es la regla del paralelogramo;
c) es una operación en V_2;
d) se hace sobre los reales.

5. La adición en V_2 es uniforme porque

a) está definida sobre el cuerpo de los reales;
b) el resultado es independiente de los representantes escogidos para operar;
c) da igual que estén o no alineados;
d) porque es una biyección.

6. La adición dota al conjunto V_2 de estructura de

a) espacio vectorial;
b) plano vectorial;
c) grupo aditivo;
d) grupo abeliano;

7. La ley de composición interna de la multiplicación de reales por vectores del plano

a) dota al conjunto de cuatro propiedades esenciales;
b) da a V_2 la estructura de espacio vectorial;
c) es que no es una operación;
d) es distributiva respecto de los reales.

8. El grupo aditivo abeliano de los complejos con el producto externo por números reales alcanza la estructura de

a) espacio vectorial complejo;
b) plano vectorial complejo;
c) espacio vectorial real;
d) los complejos no son vectores.

9. Base de un espacio vectorial es

a) dos vectores linealmente independientes con los que se pueden expresar todos los vectores del espacio;
b) tres vectores linealmente independientes con los que se pueden expresar todos los vectores del espacio;
c) el menor número posible de vectores linealmente independientes con los que se pueden expresar todos los vectores del espacio;
d) los vectores que multiplicados por dos reales, producen cualquier vector del espacio.

10. Componentes de un vector libre

a) son los números reales que le corresponden;
b) es la imagen de cada vector en la aplicación $V_n \rightarrow R^n$;
c) los escalares que multiplicando a la base producen el vector;
d) las provecciones sobre los ejes cartesianos.

11. Sólo tres de los teoremas de un espacio vectorial que se expresan son correctos. Descúbrase el que no lo es:

a) $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
b) $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;
c) $(-1) \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$;
d) $a \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (a = 0) \wedge (\boldsymbol{x} = \mathbf{0})$.

12. Una combinación lineal de n vectores

a) es otro vector del mismo espacio;
b) es nula;
c) es un polinomio de coeficientes reales;
d) es una base de V_n.

13. Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ son linealmente independientes, entonces

a) $a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v} + c \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$;
b) $(a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v} + c \cdot \boldsymbol{w} = 0) \Leftrightarrow (a = b = c = 0)$;
c) nunca tres vectores pueden ser linealmente independientes;
d) $a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v} + c \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$; $a, b, c \in R$.

14. Base de un espacio vectorial es

a) la única familia libre de vectores del espacio;
b) cada una de las infinitas familias independientes, con un número máximo de vectores, del espacio;
c) todo sistema de vectores linealmente dependientes;
d) las componentes del vector unitario.

15. Componentes de un vector de V_n en una determinada base son

a) los n números reales que determinan la base;
b) cualquier elemento de R^n;
c) los coeficientes reales de la única combinación lineal que le representa;
d) los módulos de los vectores unitarios.

16. Si respecto de la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ un vector tiene de componentes (1, 1), puede asegurarse que respecto de la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

a) tiene de componentes (1, 1, 1);
b) el planteamiento no tiene sentido, pues un espacio vectorial sólo tiene una base;
c) la cuestión es disparatada, ya que todas las bases de un espacio vectorial han de estar formadas por el mismo número de vectores;
d) no es posible decidir las coordenadas, pues depende de $\boldsymbol{w}$.

17. Dimensión de un espacio vectorial finito V_n es

a) el número de familias libres de él;
b) el número de vectores que constituyen una base;
c) la base de menor número de vectores;
d) el número de combinaciones lineales que representan al vector $\mathbf{0}$.

18. El grupo aditivo de los números reales con el producto por elementos de $(R, +, \times)$

a) es un cuerpo;
b) es el plano vectorial;
c) no se posible esa estructura;
d) es un espacio vectorial.

19. La aplicación $V_n \xrightarrow{f} R^n$

a) es solamente inyectiva;
b) no es inyectiva;
c) es una biyección;
d) no es exhaustiva.

20. La expresión $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$ indica que $V_2 \xrightarrow{f} R^2$

a) es una biyección;
b) es un isomorfismo aditivo;
c) la adición de vectores es lineal;
d) la adición vectorial es conmutativa.

21. La igualdad $f(a \cdot \boldsymbol{x})=a \cdot f(\boldsymbol{x})$, referible a la aplicación anterior, junto a la respuesta correcta del ítem 20, permite asegurar que

a) R es un espacio vectorial;
b) V_2 es un espacio vectorial;
c) $V_2 \xrightarrow{f} R^2$ es un isomorfismo;
d) $V_2 \xrightarrow{f} R^2$ es isomorfismo entre el espacio vectorial V_2 y el cuerpo de los números reales.

22. S es subespacio vectorial de V si

a) $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \Longrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in S$;
b) $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S \Longrightarrow a \cdot \boldsymbol{x}+b \cdot \boldsymbol{y} \in S,\ \forall\, a, b \in R$;
c) mantiene la misma base;
d) el producto externo por elementos de R «se hace interno» en S.

23. Utilizando una base trirrectangular y tomando como módulo de sus vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 1 centímetro, dibújese y calcúlese el vector suma de los $\boldsymbol{v}(3, 4, 0)$ y $\boldsymbol{w}(0, 0, 12)$.

24. En el espacio vectorial R^3, hállese el vector combinación lineal

$$2 \cdot \boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3,$$

donde $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ vienen dados por sus componentes, respecto de una base, siendo

$\boldsymbol{v}_1$ de componentes $(1, 0, -2)$
$\boldsymbol{v}_2$ de componentes $(0, -1, 1)$
$\boldsymbol{v}_3$ de componentes $(1, -1, -1)$

25. En el espacio vectorial de los complejos sobre el cuerpo real, establézcase el vector $4-3i$ como combinación lineal de $1-3i$ y $1+5i$.

26. Determínese la combinación lineal nula de los complejos $1+2i$, $-2-3i$ y $-i$, que tenga por escalar del primer producto el real 2.

27. Demuéstrese que en el conjunto de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que dos, los vectores 2, $x-7$, $-x^2-x+1$ son linealmente independientes.

28. Establézcanse las componentes del vector $5-i$, respecto de la base

$$\{(1-2i),\ (3+i)\}.$$

29. Determínense las ecuaciones para cambiar de la base $B_1=\{1+0i, i\}$ a la base $B_2=\{1+2i, -1+i\}$ en el espacio vectorial de los números complejos.

30. Analícese si en el espacio vectorial de las funciones derivables en el intervalo $(0, 1)$, las funciones f, tales que $f(1/2)=0$, forman o no un subespacio vectorial.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-4

1. *b).*	**6.** *d).*	**11.** *d).*	**15.** *c).*	**19.** *c).*
2. *b).*	**7.** *c).*	**12.** *a).*	**16.** *c).*	**20.** *b).*
3. *a).*	**8.** *c).*	**13.** *b).*	**17.** *b).*	**21.** *c).*
4. *c).*	**9.** *c).*	**14.** *b).*	**18.** *d).*	**22.** *b).*
5. *b).*	**10.** *b).*			

23. Véase el ejercicio 17 del capítulo 4.1.

24. Consúltese la solución del ejercicio 19 del capítulo 4.2.

25. $4-3i=23/8\cdot(1-3i)+9/8\cdot(1+5i)$.

26. Compruébese la solución con el desarrollo del ejemplo 6, que es del todo similar.

27. Coincide con la resolución del ejercicio 23 del capítulo 4.2.

28. (13/8, 9/8). La técnica puede consultarse en la resolución del ejercicio 27 del capítulo 4.2.

29. Siguiendo el modo de resolución del ejemplo 13, que es análogo, la solución es

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= a_1(1/3) + a_2(1/3) \\ a_2' &= a_1(-2/3) + a_2(1/3) \end{aligned}\right\}.$$

30. En efecto: Si dos funciones f y g, derivables en $(0, 1)$, son tales que $f(1/2) = g(1/2) = 0$, es claro que cualquiera que sean los números reales a y b, la función $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ es derivable en $(0, 1)$ y se anula en $x = 1/2$, ya que

$$(a \cdot f + b \cdot g)(1/2) = a \cdot f(1/2) + b \cdot g(1/2) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

UNIDAD TEMATICA 5

GEOMETRIA AFIN

5.1. El plano afín. Introducción al espacio afín

1. *Las traslaciones*
2. *El grupo de las traslaciones del plano*
3. *Referencias en el plano. Coordenadas*
4. *Ecuaciones de la traslación*
5. *Cambio de sistema de referencia*
6. *Concepto de plano afín. Introducción al espacio afín*

5.2. Geometría afín

1. *Concepto de variedad lineal afín. La recta*
2. *Determinación de la recta*
3. *Ecuaciones de la recta*
4. *Posiciones relativas de dos rectas*
5. *Baricentros*
6. *Punto medio de un segmento. Razón simple de tres puntos*
7. *Determinación del punto que divide a un segmento en una razón dada*

5.3. Ejercicios y problemas de recapitulación

5.4. Autoevaluación A-5

5.1

El plano afín. Introducción al espacio afín

1. LAS TRASLACIONES

Considérese el plano $\mathcal{P}$ como conjunto de puntos y, junto con él, el espacio vectorial V_2 de los vectores del mismo.

Si se fija un vector libre, $\boldsymbol{x}$, dado por uno de sus representantes, (P, Q), y se toma un punto $M \in \mathcal{P}$, existe un único punto $N \in \mathcal{P}$, tal que $(M, N) \in \boldsymbol{x}$, de acuerdo con la proposición del epígrafe 4, del capítulo 4.1.

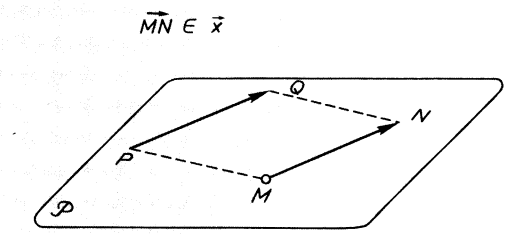


FIG. 5.1.

La notación $(M, N) \in \boldsymbol{x}$ es equivalente a poner $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{x}$, donde $\overrightarrow{MN}$ es el vector libre, uno de cuyos representantes es (M, N).

Es posible, entonces, establecer la siguiente correspondencia entre puntos del plano:

> A cada punto M se le hace corresponder el punto N que es extremo del vector representante de $\boldsymbol{x}$ con origen en M.

Es decir:

$$M \xrightarrow{t_x} N = t_x(M) / \overrightarrow{MN} \in \boldsymbol{x}$$

La correspondencia que se acaba de establecer es una aplicación, dado que cada punto M tiene una imagen, y sólo una, puesto que el representante de $\boldsymbol{x}$ con origen en M existe y es único. Además, t_x es una aplicación inyectiva y exhaustiva, por lo que se tratará de una biyección del plano $\mathcal{P}$ sobre sí mismo.

Ejercicio 1

Demuéstrese que t_x es una biyección del plano sobre sí mismo.

Ejercicio 2

¿Puede darse el caso de que vectores libres distintos, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dan origen a aplicaciones t_x y t_y iguales?

Definición:

> Se llama *traslación* de vector $\boldsymbol{x}$, definida sobre el plano $\mathcal{P}$, a la aplicación t_x *asociada a* $\boldsymbol{x}$.

Teniendo en cuenta la manera de definir t_x se puede enunciar:

> Una traslación en el plano es una biyección de $\mathcal{P}$ en la que a cada punto se le hace corresponder un punto P' de manera que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sea un vector libre $\boldsymbol{x}$, denominado vector de la traslación.

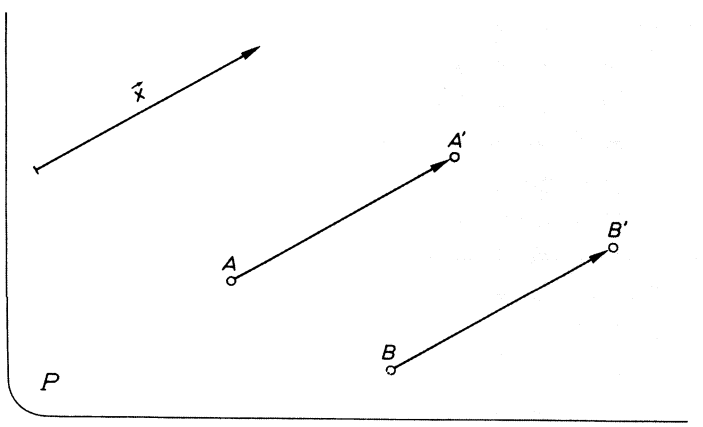


FIG. 5.2.

En la figura 5.2, A' y B' son los puntos transformados de A y B, respectivamente, en la traslación de vector $\boldsymbol{x}$. Los vectores ligados (A, A') y (B, B') son equipolentes, dado que los dos pertenecen al mismo vector libre $\boldsymbol{x}$, que define la traslación.

Determinación de una traslación

Como se ha visto, cada traslación viene asociada a un vector libre $\boldsymbol{x}$, de forma que, conocido éste, la traslación queda determinada. Como un vector libre se conoce en el momento en que se sabe uno de sus representantes, una traslación queda perfectamente determinada dando un punto P y su transformado P', pues $\overrightarrow{PP'}$ es el vector de la traslación.

Enunciemos el resultado:

> Una traslación en el plano queda determinada por un punto y su transformado.

En la figura 5.3 se muestra cómo construir el transformado de un punto cualquiera M conociendo P y P'. Basta construir un vector de origen en M equipolente al vector de origen P y extremo P'. El extremo M' del citado vector es el punto buscado, imagen de M en la traslación.

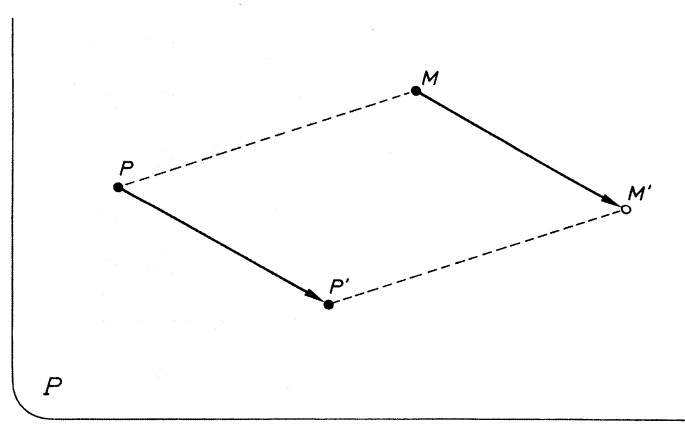


FIG. 5.3.

Notación

Para indicar que el punto N es el transformado del M en la traslación t_x definida por el vector $\boldsymbol{x}$ escribiremos indistintamente

$$N = t_x(M) \quad \text{ó} \quad N = M + \boldsymbol{x}$$

Con esta última notación se quiere expresar que el vector libre $\boldsymbol{x}$ «opera» sobre el punto M para dar como resultado el punto N.

2. EL GRUPO DE LAS TRASLACIONES DEL PLANO

Como se ha visto, a cada vector $\boldsymbol{x} \in V_2$ se puede asociar una traslación en el plano y, recíprocamente, a cada traslación le corresponde un vector libre, el constituido por todos los vectores del plano cuyo extremo es transformado de su origen en la traslación dada.

Llamemos Φ a la aplicación

$$V_2 \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{T}$$
$$\boldsymbol{x} \longrightarrow t_x$$

A cada vector se le hace corresponder la traslación que define.

Según el ejercicio 2, tal aplicación Φ es inyectiva, pues vectores distintos dan origen a traslaciones distintas. Como por otro parte cada traslación viene originada por un vector, la aplicación Φ de V_2 en $\mathfrak{T}$ resulta exhaustiva, de forma que

Φ es una biyección de V_2 sobre $\mathfrak{T}$

Centrándonos ahora en el conjunto $\mathfrak{T}$ vamos a definir una ley de composición interna en el mismo, llamada *producto de traslaciones,* y a analizar la estructura resultante.

Para ello conviene partir del siguiente ejemplo.

Considérense las traslaciones t_x y t_y de vectores respectivos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representados en la figura 5.4.

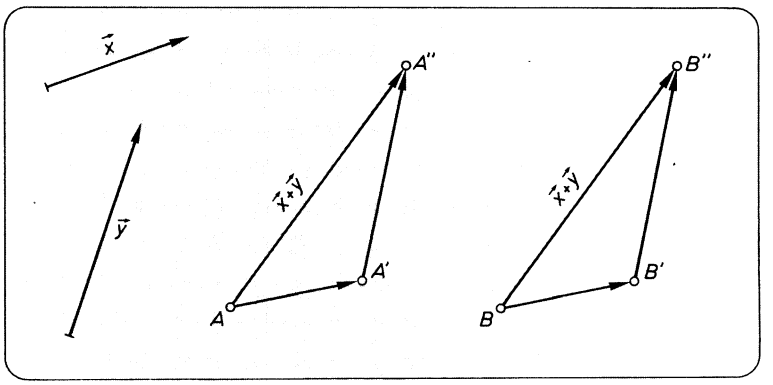


FIG. 5.4.

La imagen de un punto A, según t_x, es A'; y, haciendo actuar ahora sobre A' la traslación t_y, se obtiene como imagen A''. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} t_x(A)=A' \\ t_y(A')=A'' \end{array}\right\} \Longrightarrow t_y\,[t_x(A)]=A''$$

La transformación que lleva «directamente» del punto A al A'' se denomina «producto de las traslaciones t_x y t_y», que no es otra que la aplicación compuesta $t_y \circ t_x$.

Recordando la definición de suma de vectores libres, y teniendo en cuenta la figura 5.4, se puede concluir:

> El producto de dos traslaciones es otra traslación, cuyo vector es el vector suma de los de las traslaciones factores
>
> $$t_y \circ t_x = t_{x+y}$$

El esquema siguiente ilustra gráficamente lo dicho:

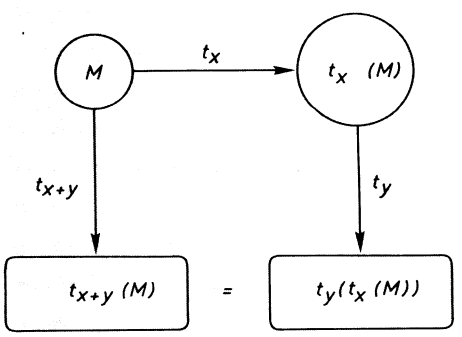


FIG. 5.5.

De esta manera ha quedado establecido el producto de traslaciones como ley de composición interna en $\mathfrak{T}$.

Veamos a continuación cuál es la estructura del conjunto $\mathfrak{T}$ con esta operación.

Como Φ es una biyección de $(V_2, +)$ sobre $(\mathfrak{T}, \circ)$ y $\Phi(x+y) = t_y \circ t_x$, resultan ser isomorfos $(V_2, +)$ y $(\mathfrak{T}, \circ)$, con lo cual este último conjunto alcanza estructura de grupo abeliano.

Es inmediato comprobar que, en dicha aplicación, al vector $-\boldsymbol{x}$ le corresponde la traslación inversa de la de vector $\boldsymbol{x}$, y que al vector cero le corresponde en $\mathfrak{T}$ la transformación idéntica, que es el elemento neutro del grupo.

La relación $t_y \circ t_x = t_{x+y}$ se traduce ahora en

$$(M + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = M + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$$

cualesquiera que sean el punto M del plano y los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de V_2.

Ejercicio 3

En la expresión

$$(M + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = M + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$$

los signos + no tienen todos ellos el mismo sentido. Hágase notar el significado de cada uno de ellos.

Ejercicio 4

Si P y Q son puntos del plano afín y $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vectores tales que

$$P + \boldsymbol{x} = Q + \boldsymbol{y}$$

¿Qué se puede decir del vector $\boldsymbol{z}$ tal que $Q = P + \boldsymbol{z}$?

Ejercicio 5

Demuéstrese que si se verifican a la vez las dos relaciones

$$P + \boldsymbol{x} = Q + \boldsymbol{y}$$
$$P + \boldsymbol{y} = Q + \boldsymbol{x}$$

debe ser necesariamente $P = Q$ y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

El grupo abeliano de las traslaciones se muestra como herramienta potente para resolver una serie de «problemas gráficos», típicos en el tratamiento clásico de la geometría del plano. Sirva de ejemplo el siguiente planteamiento.

Dadas dos circunferencias de centros P y Q, encájese entre ambas un segmento de dirección y magnitud dadas.

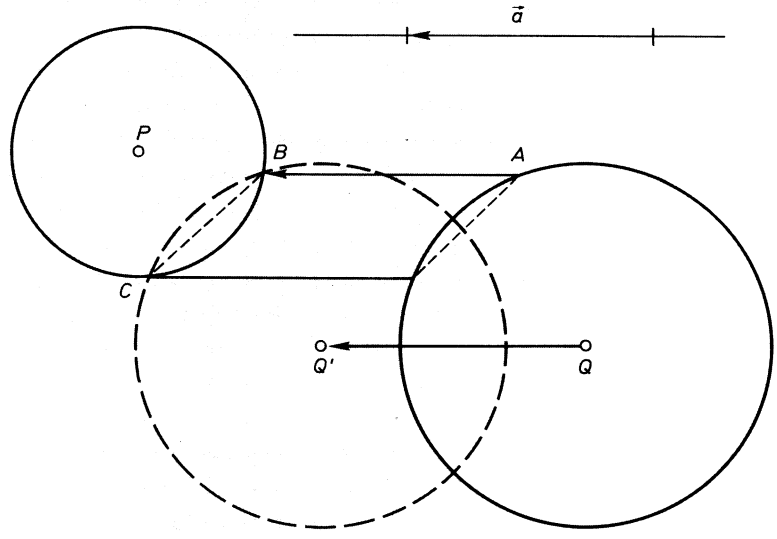


FIG. 5.6.

Sean $\boldsymbol{a}$ y $-\boldsymbol{a}$ los vectores libres correspondientes al segmento dado, según el sentido que se tome sobre él. El problema quedará resuelto cuando se haya construido un vector ligado $\overrightarrow{AB} \in \boldsymbol{a}$ que apoye su origen y su extremo en las dos circunferencias.

Imagínese el problema resuelto. Así, se podrá entender que la traslación planteada lleva A a B; es decir,

$$t_a(A) = B$$

Por tanto, si se aplica la traslación a la circunferencia Q, la circunferencia trasladada Q' cortará a la P en los puntos B y C que se buscan. (Según la naturaleza de los datos, podrán haber dos, una o ninguna soluciones.)

Ejercicio 6

Dadas dos rectas paralelas y una secante, constrúyase un triángulo equilátero de lado a, de modo que cada uno de sus vértices pertenezcan a cada una de las tres rectas.

Ejercicio 7

Los datos para construir un cuadrilátero son: las direcciones y magnitudes de sus dos diagonales y también la magnitud de dos lados opuestos. Constrúyase.

Ejercicio 8

Determínese la mínima poligonal de extremos A y B, que corta en la dirección $\boldsymbol{v}$ *a las paralelas a y b de la figura* 5.7.

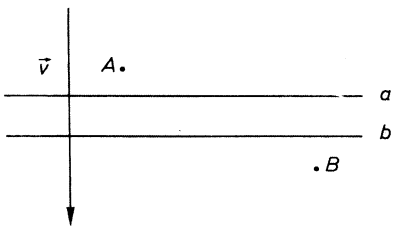


FIG. 5.7.

3. REFERENCIAS EN EL PLANO. COORDENADAS

Definición:

> Se llama sistema de referencia en el plano al conjunto formado por un punto O del mismo, llamado origen, y una base B del espacio vectorial V_2.

Cuando se tiene un sistema de referencia en el plano es posible hacer corresponder a cada punto P del mismo un par de números (x, y), que se llaman «coordenadas cartesianas de P», en la referencia elegida.

Para lograr esto recuérdese que una traslación viene determinada por dos puntos homólogos, de manera que, dado P, existe una única traslación que transforma el origen O en el punto P, precisamente la de vector $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{p}$.

En la base $B\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, el vector P se escribe de manera única

$$\boldsymbol{p} = x \cdot \boldsymbol{u} + y \cdot \boldsymbol{v}$$

Los dos números x e y se llaman coordenadas de P en la referencia $\{O, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

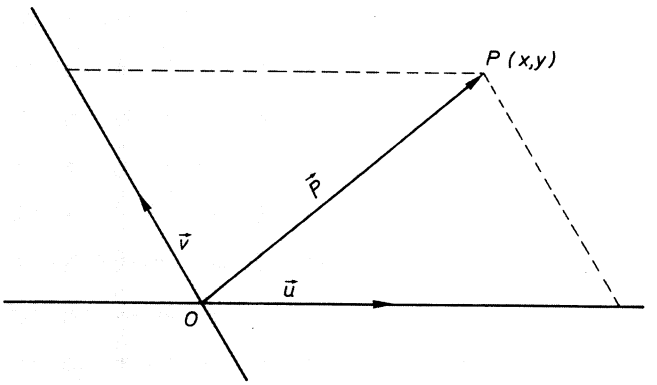


FIG. 5.8.

Obsérvese en esquema el camino seguido para establecer esta correspondencia

$$P \longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{p} = x \cdot \boldsymbol{u} + y \cdot \boldsymbol{v} \longleftrightarrow (x, y)$$

La doble flecha significa que, recíprocamente, dados dos números (x, y) queda determinado un único punto P respecto de la referencia dada. Se acaba de establecer, pues, una biyección entre el conjunto de puntos del plano y R^2.

Ejercicio 9

En la referencia adjunta, una vez trasladada a una hoja de papel, márquense los puntos cuyas coordenadas cartesianas son:

$$A(1, -2) \quad ; \quad B(2, 0) \quad ; \quad C(-1, 1/2).$$

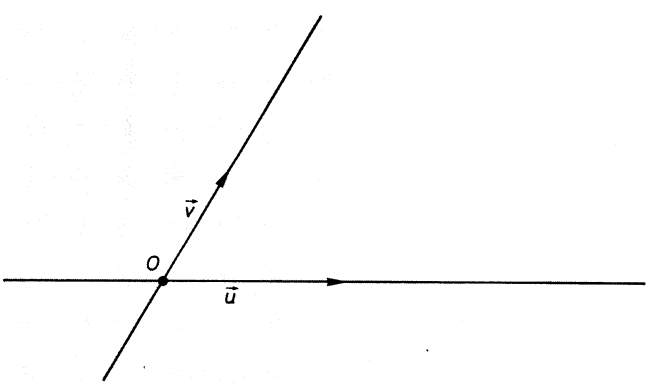


FIG. 5.9.

4. ECUACIONES DE LA TRASLACION

Nuestro primer uso de las coordenadas cartesianas va a consistir en obtener una relación analítica entre las coordenadas de un punto y las de su transformado en una traslación.

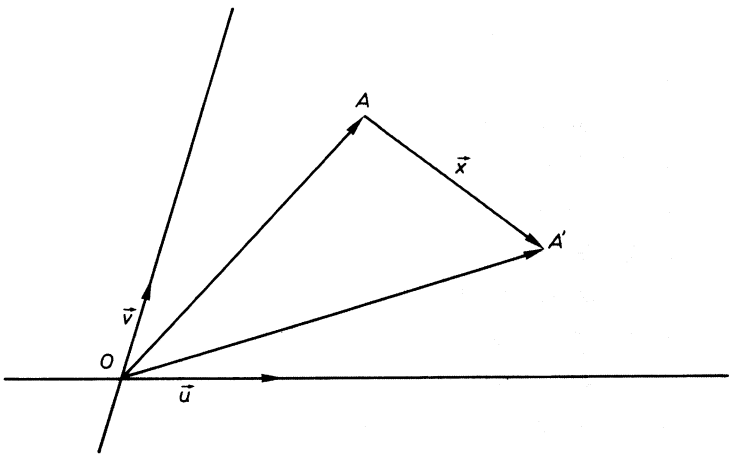


FIG. 5.10.

Sea $\{O; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ un sistema de referencia cartesiana, y t_x una traslación de vector $\boldsymbol{x}$ que, en términos de la base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ se expresa en la forma

$$\boldsymbol{x} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$$

Si A es el punto de coordenadas (x, y), y $A'(x', y')$ es su transformado en la traslación t_x, se tiene (véase Fig. 5.10):

$$A' = A + \boldsymbol{x}$$

o bien

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{x}$$

Pero las componentes de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ no son otras sino las coordenadas de A y A', respectivamente, por lo que se puede escribir

$$x' \cdot \boldsymbol{u} + y' \cdot \boldsymbol{v} = x \cdot \boldsymbol{u} + y \cdot \boldsymbol{v} + a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$$

es decir

$$x' \cdot \boldsymbol{u} + y' \cdot \boldsymbol{v} = (x + a) \cdot \boldsymbol{u} + (y + b) \cdot \boldsymbol{v}$$

de donde se obtiene

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

Estas son las ecuaciones de la traslación.

Una traslación lleva el punto $(1, -6)$ sobre el $(2, 4)$. Hállense sus ecuaciones y el transformado del punto $(3, 9)$.

El vector de la traslación será el vector $(2, 4) - (1, -6) = (1, 10)$, con lo que la traslación se escribe

$$x' = x + 1$$
$$y' = y + 10$$

y el transformado del punto (3,9) es (4, 19).

Ejercicio 10

Una traslación t_1 lleva el origen del plano al punto $(4, 3)$, *mientras que otra traslación t_2 lleva el punto* $(2, 1)$ *al origen. Obténganse las ecuaciones de la traslación producto de ambas y las ordenadas del punto cuyo transformado en dicha traslación es el* $(-1, 7)$.

Ejercicio 11

Una habitación cuadrada se halla embaldosada con 289 *baldosas cuadradas iguales. Una persona que se halla situada en la baldosa central realiza el siguiente movimiento:*

Se traslada tres baldosas hacia su izquierda, dos hacia el frente, cuatro a la derecha y tres hacia atrás. A continuación, y partiendo de la posición alcanzada, repite el proceso otras siete veces.

¿En qué baldosa se encuentra después de realizar todos los movimientos?

Si invirtiera el orden de los movimientos, ¿cuántas veces podría repetir el movimiento, partiendo del centro, sin verse impedida de continuar a causa de las paredes?

Estúdiese también esta última cuestión en el caso en que la sucesión de movimientos fuese cuatro baldosas a la derecha, dos hacia el frente, tres hacia la izquierda y tres hacia atrás.

A la vista de este caso, ¿se puede seguir manteniendo que el producto de traslaciones es conmutativo?

5. CAMBIO DE SISTEMA DE REFERENCIA

Supónganse dados dos sistemas de referencia cartesianos, ambos con el mismo origen O

$$S_1 : \{O;\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \qquad \text{y} \qquad S_2 : \{O;\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$$

El problema que planteamos es el siguiente: Dado un punto P del plano, cuyas coordenadas respecto de S_1 son (x, y), y respecto de S_2 (x', y'), hallar la relación existente entre ellas.

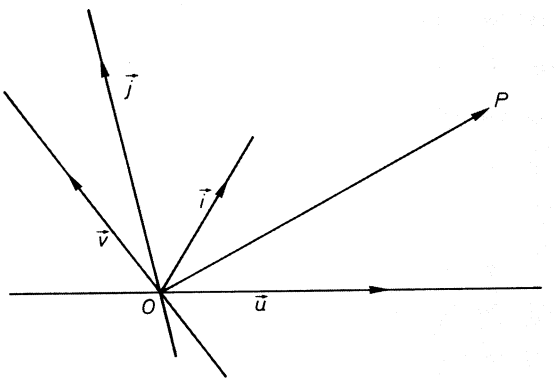


FIG. 5.11.

Se tiene

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \boldsymbol{u} + y \cdot \boldsymbol{v} = x' \cdot \boldsymbol{i} + y' \cdot \boldsymbol{j}$$

Como $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ es una base de V_2, los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ podrán expresarse de forma única:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \alpha\, \boldsymbol{i} + \beta\, \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v} &= \alpha' \boldsymbol{i} + \beta' \boldsymbol{j} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Sustituyendo en la expresión de $\overrightarrow{OP}$ se obtiene

$$x \cdot (\alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j}) + \text{y} \cdot (\alpha' \boldsymbol{i} + \beta' \boldsymbol{j}) = x' \cdot \boldsymbol{i} + y' \cdot \boldsymbol{j}$$

e igualando los coeficientes de i y de j en ambos miembros resulta, en definitiva,

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \alpha x + \alpha' y \\ y' &= \beta x + \beta' y \end{aligned}}$$

que es la relación buscada.

Pasando ahora al caso general, cuando los dos sistemas tienen distinto origen, sean como antes (x, y) y (x', y') las coordenadas de P en cada uno de los sistemas S_1 y S_2, respectivamente. Análogamente, sean las relaciones (I) las que ligan a los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$. Suponemos que los sistemas son

$$S_1 : \{O;\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \quad \text{y} \quad S_2 : \{O';\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$$

y que las coordenadas de O' respecto del primer sistema son (a, b).

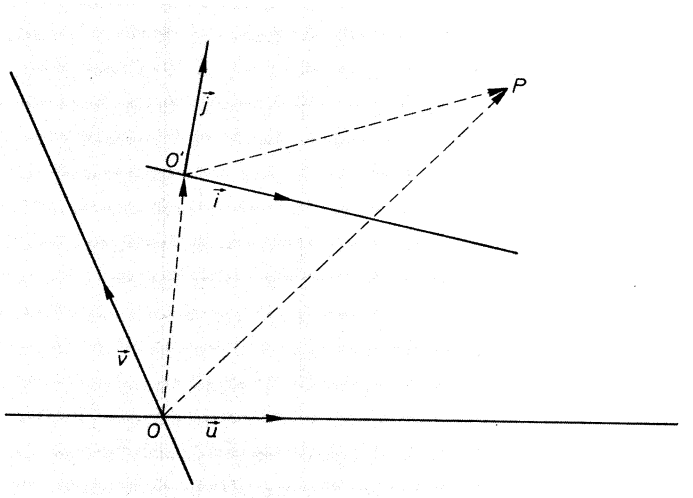


FIG. 5.12.

Se tiene, entonces (véase Fig. 5.12),

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

y expresando los vectores en función de las bases.

$$x \cdot \boldsymbol{u} + y \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v} + x' \cdot \boldsymbol{i} + y' \cdot \boldsymbol{j}$$

Si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ e $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ están relacionados por (I), pasando al primer miembro $a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$ y sustituyendo $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ por sus expresiones en función de $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ se obtiene:

$$(x - a) \cdot (\alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j}) + (y - b) \cdot (\alpha' \boldsymbol{i} + \beta' \boldsymbol{j}) = x' \cdot \boldsymbol{i} + y' \cdot \boldsymbol{j}$$

de donde, igualando los coeficientes de $\boldsymbol{i}$ y de $\boldsymbol{j}$ de cada miembro,

$$x' = (x - a)\alpha + (y - b)\alpha' = x\alpha + y\alpha' - (a\alpha + b\alpha')$$
$$y' = (x - a)\beta + (y - b)\beta' = x\beta + y\beta' - (a\beta + b\beta')$$

Estas son las relaciones buscadas. Dadas las coordenadas (x, y) permiten calcular (x', y'). Nótese que $(-a\alpha - b\alpha',\ -a\beta - b\beta')$ son las coordenadas del

origen O del primer sistema respecto al segundo, como se ve poniendo $x=y=0$ en las relaciones anteriores.

Ejercicio 12

Hállense las coordenadas del punto P, que en el sistema $S_1:\{O;\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ *son* $(4, -3)$ *cuando se cambia al sistema* $S_2:\{O;\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ *sabiendo que* $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}$, *y que las coordenadas de* O' *en el sistema* S_1 *son* $(-1, 2)$.

Un caso particularmente sencillo es el de cambio de origen solamente, sin alterar la base de V_2. Si del sistema $\{O;\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ se pasa al $\{O';\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, y las

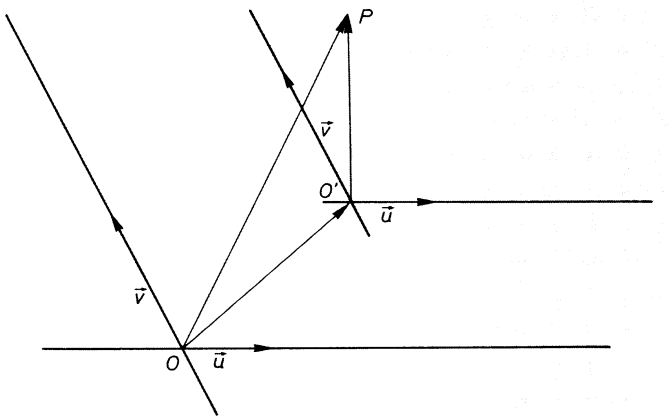


FIG. 5.13.

coordenadas de O' en la primera referencia son (a, b), la inspección de la figura permite escribir inmediatamente:

$$\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OP} \quad \text{de donde} \quad \overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OO'}$$

y, por tanto,

$$(x'\cdot\boldsymbol{u}+y'\cdot\boldsymbol{v})=(x\cdot\boldsymbol{u}+y\cdot\boldsymbol{v})-(a\cdot\boldsymbol{u}+b\cdot\boldsymbol{v})$$

de donde

$$x'=x-a$$
$$y'=y-b$$

Adviértase que el resultado es equivalente a una traslación.

Las coordenadas del punto $P(2, 3)$ al pasar del origen O al $O'(2, -1)$ sin cambiar los vectores de la base son:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - 2 \text{ particularizado para } x = 2 \Longrightarrow x' = 0 \\ y' = y + 1 \text{ particularizado para } y = 3 \Longrightarrow y' = 4 \end{array}\right\} P(0, 4)$$

6. CONCEPTO DE PLANO AFIN. INTRODUCCION AL ESPACIO AFIN

Como se habrá podido comprobar a través de todos los epígrafes anteriores, la consideración del plano $\mathcal{P}$ junto con el conjunto $\mathfrak{T}$ de sus traslaciones ha dotado al plano de una estructura, que ha permitido la introducción de coordenadas, por ejemplo, y que seguirá utilizándose en el siguiente capítulo. La estructura mencionada recibe el nombre de estructura afín sobre el plano, y el plano se llama *plano afín.*

Los puntos esenciales son:

a) dados dos puntos M y N del plano $\mathcal{P}$ siempre existe una traslación que lleva M sobre N;

b) una traslación que deje invariante el punto M es la que corresponde al vector nulo;

c) para dos traslaciones cualesquiera t_x y t_y se verifica

$$t_y \; t_x = t_{x+y}$$

Puesto que cada vector de V_2 tiene asociada una traslación se puede considerar la aplicación de $\mathcal{P} \times V_2$ en $\mathcal{P}$ definida así

$$\begin{array}{l} \mathcal{P} \times V_2 \longrightarrow \mathcal{P} \\ (M, \boldsymbol{x}) \longrightarrow M + \boldsymbol{x} \end{array}$$

Es decir:

> Al par formado por el punto M y el vector $\boldsymbol{x}$ se le hace corresponder el punto transformado del M por la traslación de vector $\boldsymbol{x}$.

Las propiedades *a), b)* y *c)* anteriores, características de la estructura afín, permiten enunciar

> *Plano afín* es el plano $\mathcal{P}$, con la estructura obtenida mediante la aplicación
>
> $$\mathcal{P} \times V_2 \xrightarrow{t} \mathfrak{T}$$
>
> que cumple las propiedades
>
> I. $\forall\, N, M \in \mathcal{P}, \; \exists^* \, \boldsymbol{x} \in V_2 / N = M + \boldsymbol{x}$.
>
> II. $M + \boldsymbol{x} = M \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$.
>
> III. $(M + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = M + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

La pauta seguida en el caso del plano se extiende inmediatamente al espacio, y la consideración de los vectores libres del mismo y de las traslaciones asociadas permite dotar de estructura afín al espacio considerado como conjunto de puntos. La introducción de coordenadas cartesianas es totalmente análoga, con la única diferencia de que ahora la base del espacio vectorial V_3 está constituida por tres vectores en lugar de dos como en el caso del plano.

Ejercicio 13

Siguiendo el mismo sistema que en el caso del plano, hállense las ecuaciones de una traslación en el espacio.

Ejercicio 14

Una traslación en el espacio lleva el punto $(1, 0, -1)$ *al* $(2, 3, 1)$. *Hállense las ecuaciones de la traslación y las de su inversa. ¿Cuál es el punto transformado en esta última del* $(4, 2, 3)$?

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.1

1. Sea P un punto del plano y $\boldsymbol{x}=\{\overrightarrow{MN}\}$. Entonces $-\boldsymbol{x}=\{\overrightarrow{NM}\}$. Considérese el vector representante de $-\boldsymbol{x}$ con origen en P, y sea Q su extremo. Entonces $\{\overrightarrow{QP}\}=\boldsymbol{x}$, es decir, $t_x(Q)=P$, por la que la aplicación es sobreyectiva. Como claramente el punto Q, antiimagen de P, es único, se trata de una biyección.

2. No puede darse.

3. El único que representa una ley interna es el que se encuentra dentro del paréntesis del segundo miembro, indicando la suma de los dos vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Los tres restantes representan la actuación que tiene un vector sobre un punto del plano para dar otro punto, y en ese sentido se pueden interpretar como símbolos de una ley externa definida sobre $\mathcal{P}$ con V_2 como dominio de operadores.

4. De $Q=P+\boldsymbol{z}$ resulta

$$Q+\boldsymbol{x}=(P+\boldsymbol{z})+\boldsymbol{x}=P+(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x})=P+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})=(P+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}=$$
$$=(Q+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=Q+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}).$$

Luego, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ y, así, $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$.

5. De $P+\boldsymbol{x}=Q+\boldsymbol{y}$ se deduce

$$P+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=Q+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}),$$

es decir,

$$(P+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{x}=Q+2\boldsymbol{y}$$

y como $P+\boldsymbol{y}=Q+\boldsymbol{x}$,

$$Q+2\boldsymbol{x}=Q+2\boldsymbol{y}$$

lo que exige que sea $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. A partir de aquí se deduce fácilmente que también $P=Q$.

6.

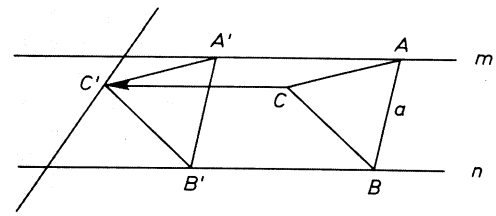


FIG. 5.14.

1.º Desde cualquier $A \in m$, se dispone $\overline{AB}=a$, de modo que $B \in n$.

2.º Se completa el triángulo ABC.

3.º Se traslada ABC, según $\overrightarrow{CC'} \in \boldsymbol{v}$, resultando una de las soluciones $A'B'C'$.

7. Supóngase resuelto el problema. Sean a y c los lados conocidos. Haciendo una traslación de vector $\boldsymbol{a}$, la diagonal BD pasa a AE.

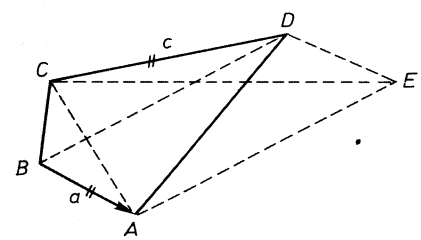


FIG. 5.15.

Esto sugiere la siguiente construcción: tomando un punto cualquiera como vértice A, se construye el triángulo AEC. Sobre el lado CE se construye el triángulo CDE, cuyos lados CD y DE son los lados conocidos del cuadrilátero. Se obtiene así el vértice D. El B se consigue sin más que deshacer la traslación

de vector $\boldsymbol{a}$, resultando ser el transformado de A en esa traslación opuesta.

8. 1. Se traslada A hasta A', según $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{RS}$.
2. Se une A' con B.
3. $A'B \cap b = Q$.
4. Se elige P, tal que $\overrightarrow{PQ} \in \boldsymbol{v}$.

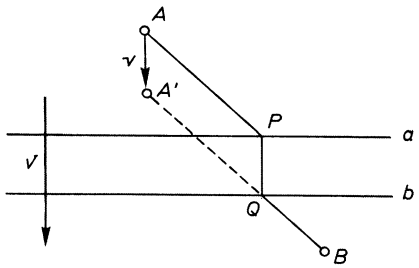


FIG. 5.16.

9.

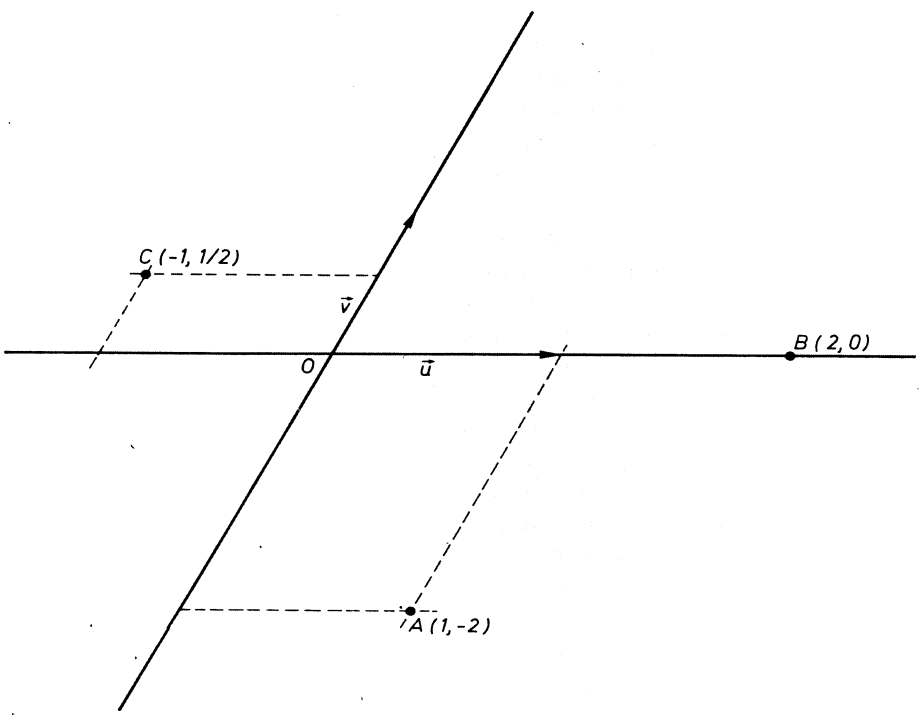


FIG. 5.17.

10.

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

$(-3, 5)$ tiene como transformado a $(-1, 7)$.

11. El efecto neto de realizar los cuatro movimientos es desplazarse a la baldosa situada en diagonal con la de partida, atrás y a la derecha. Después de los ocho movimientos que en total ha realizado alcanzará el rincón de la habitación situado atrás y a la derecha de la posición de partida. No encuentra obstáculo en las paredes de la habitación. Si altera el orden de los movimientos de manera indicada, partiendo del centro podrá realizarlos cinco veces, pero no seis, pues se verá obstaculizado por la pared. Esto no significa que el producto de traslaciones no sea conmutativo. Si no existiese el obstáculo de la pared, después de ocho repeticiones del movimiento alcanzaríamos la baldosa del rincón.

12. $(x', y') = (-15, 10)$.

13.

$$\begin{aligned} x' &= x + a; \\ y' &= y + b; \\ z' &= z + c; \end{aligned}$$

donde (a, b, c) es el vector de la traslación.

14.

$$\begin{aligned} x' &= x + 1 \\ y' &= y + 3 \\ z' &= z + 2 \end{aligned}$$

Ello implica que la traslación inversa es

$$\begin{aligned} x &= x' - 1 \\ y &= y' - 3 \\ z &= z' - 2 \end{aligned}$$

El transformado por esta última del punto $(4, 2, 3)$ es $(3, -1, -1)$.

5.2

Geometría afín

1. CONCEPTO DE VARIEDAD LINEAL AFIN. LA RECTA

Considérese el plano afín $\mathcal{P}$ construido sobre V_2.

Un subconjunto $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P}$ se llama variedad lineal afín cuando, elegido un punto $P \in \mathcal{L}$, el conjunto de vectores $\{\overrightarrow{PQ}\}$, cuando $Q \in \mathcal{L}$, es un subespacio vectorial de V_2.

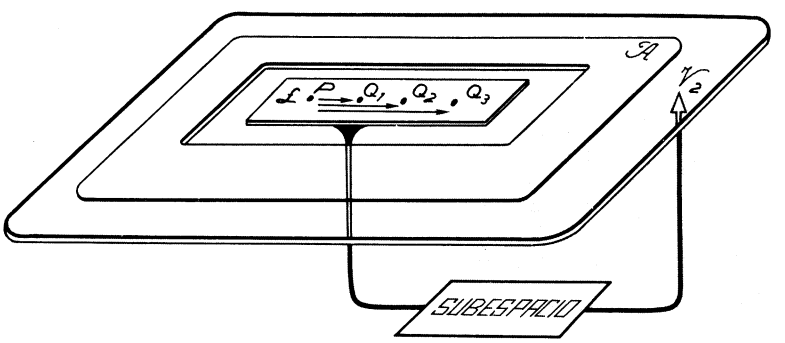


FIG. 5.18.

Ejemplo 7

Como todo espacio vectorial es subespacio de sí mismo, el propio plano afín $\mathcal{P}$ es una variedad lineal, ya que fijado un punto P como origen, el conjunto de vectores $\overrightarrow{PQ}$, cuando Q varía en el plano, es un subespacio de V_2 (todo V_2).

Ejemplo 8

Cualquier punto del plano afín es una variedad lineal, pues el único vector que se obtiene uniendo P con P es el vector $\mathbf{0}$, que constituye, él solo, un subespacio vectorial.

Prescindiendo de estos dos ejemplos, en el plano sólo cabe la posibilidad de otro tipo de variedades lineales, las correspondientes a subespacios vectoriales de dimensión 1.

Si se toma un punto P del plano, y un vector $\boldsymbol{x} \in V_2$, el conjunto de puntos

$$r = \{Q / Q = P + \lambda \boldsymbol{x}\}$$

donde λ recorre el cuerpo real, es una variedad lineal. Pues para cada punto $Q \in r$ el vector $\overrightarrow{PQ} \in \lambda \boldsymbol{x}$. Cuando Q varía en r, $\lambda \boldsymbol{x}$ recorre un subespacio de V_2, claramente unidimensional, es decir, una recta vectorial. A la variedad lineal r se le llama recta del plano afín.

> Recta del plano afín es toda variedad lineal asociada a un subespacio vectorial unidimensional.

2. DETERMINACION DE LA RECTA

Si se conoce un punto de la misma y el subespacio vectorial asociado a la recta, ésta queda determinada.

Determinar una variedad lineal supone dar un criterio que permita decidir si un punto del plano pertenece o no a la variedad establecida.

Un punto de la recta queda caracterizado porque al dar un punto fijo P de la misma, y el subespacio vectorial asociado (que se suele llamar *subespacio* de dirección o *director),* el vector determinado por P y dicho punto es del subespacio.

En el caso que nos ocupa, dando dos puntos distintos, también queda determinada una recta, pues se conoce un punto (uno de los dos dados) y el subespacio director, ya que al ser de dimensión 1, el vector determinado por los dos puntos dados constituye una base del mismo (al ser distintos el

vector determinado es no nulo). Como la base determina al subespacio, se suele llamar al vector de la base «vector director» de la recta.

En resumen:

a) una recta queda determinada por un punto y su vector director;
b) una recta queda determinada por dos puntos distintos.

3. ECUACIONES DE LA RECTA

Considérese en el plano una referencia $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ y la recta determinada por el punto P, de coordenadas (p_1, p_2), y el vector dirección $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$.

Si Q es un punto arbitrario de la recta, de coordenadas (x, y), se tiene:

a) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es del subespacio director, luego existe un número real λ tal que

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \cdot \boldsymbol{u}.$$

b) De la figura 5.19 se desprende

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \boldsymbol{u}$$

Por tanto, recordando que las coordenadas de un punto A en una referencia no son sino las componentes del vector $\overrightarrow{OA}$ respecto de la base $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \text{Vector } \overrightarrow{OQ} &: \quad x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \\ \text{Vector } \overrightarrow{OP} &: \quad p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} \\ \text{Vector } \boldsymbol{u} &: \quad \lambda \cdot (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) = \lambda a\boldsymbol{i} + \lambda b\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

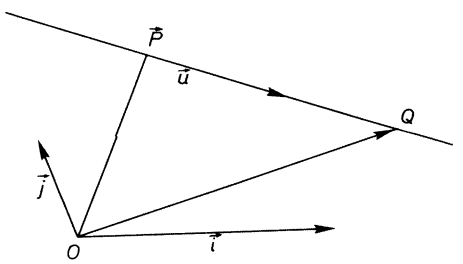


FIG. 5.19.

con lo que, en definitiva,

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(p_1+\lambda a)\boldsymbol{i}+(p_2+\lambda b)\boldsymbol{j}\ ;$$

y como la representación de un vector en una base es única debe verificarse:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=p_1+\lambda a\\ y&=p_2+\lambda b\end{aligned}}$$

Este par de ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de la recta. Para cada valor del *parámetro* λ se obtienen las coordenadas de un punto de la recta. Recíprocamente, si dados dos números (x, y), coordenadas de un punto del plano, existe un valor de λ solución del sistema de ecuaciones anterior, el punto pertenece a la recta.

Hállense las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3)$ y tiene por vector de dirección el $\boldsymbol{u}=(2, 1)$.

Procediendo como antes, se obtiene

$$\begin{aligned} x&=-1+2\lambda\\ y&=3+\lambda\end{aligned}$$

Para $\lambda=-1$ se obtiene el punto $(-3, 2)$, perteneciente a la recta. Si piden verificar si el punto $(3, 4)$ pertenece a la recta basta sustituir (x, y) por $(3, 4)$, obteniéndose el sistema

$$\begin{aligned} 3&=-1+2\lambda\\ 4&=3+\lambda\end{aligned}$$

Para satisfacer la última ecuación debe ser $\lambda=1$, y como este valor no es solución de la primera, el sistema resulta incompatible, por lo que el punto propuesto no pertenece a la recta.

Ejercicio 15

Obténganse las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los dos puntos $P(1, 3)$ *y* $Q(-2, 5)$.

De los puntos $A(-7/2, 6)$; $B(23,45)$; $C(-218, 149)$; $D(0, 1)$, *dígase cuáles pertenecen a la recta y cuáles no.*

Las ecuaciones paramétricas de la recta se obtienen con gran facilidad, como se desprende del ejemplo anterior. No obstante, es conveniente a veces disponer de otras formas para expresar el hecho de que una serie de puntos

se hallan alineados. Para llegar a una forma distinta de ecuación de la recta, considérense las ecuaciones paramétricas de la misma

$$\boxed{\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda a \\ y &= p_2 + \lambda b \end{aligned}}$$

Si se elimina λ entre las dos ecuaciones, despejándola en cada una de ellas e igualando las expresiones obtenidas, resulta:

$$\lambda = \frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b}$$

es decir:

$$b(x - p_1) = a(y - p_2)$$

Pasando todo a un miembro, se llega a una ecuación de la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0 \qquad A, B, C, \text{ números reales}}$$

¿Qué interpretación ha de darse a esta ecuación? Al sustituir en ella las coordenadas de un punto del plano sólo caben dos posibilidades:

a) el punto verifica la ecuación;
b) el punto no la verifica.

En el primer caso, las coordenadas del punto son tales que las dos expresiones

$$\frac{x - p_1}{a} \quad \text{e} \quad \frac{y - p_2}{b}$$

toman valores iguales, e iguales a λ, lo que significa que el sistema de ecuaciones en λ obtenido al poner los valores dados de x, y en las ecuaciones paramétricas de la recta, es compatible, por lo que el punto considerado pertenece a la recta. En el caso *b)*, el punto no pertenece a la recta. Por consiguiente:

> La ecuación de primer grado $Ax + By + C = 0$ obtenida eliminando λ entre las dos ecuaciones paramétricas de la recta expresa la relación que debe existir entre las coordenadas x, y de un punto para que pertenezca a la recta.

La ecuación $Ax + By + C = 0$ recibe el nombre de ecuación general de la recta.

Ejemplo 10

Obténgase la ecuación general de la recta que pasa por el punto (2, 1) y tiene como vector de dirección el (3, 4).

Se puede proceder escribiendo las ecuaciones paramétricas de la recta

$$x = 2 + 3\lambda$$
$$y = 1 + 4\lambda$$

Eliminando λ resulta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4},$$

es decir,

$$4x - 3y - 5 = 0$$

pero es más fácil recordar la expresión

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

donde x_1 e y_1 son las coordenadas del punto dado, y (a, b) el vector dirección.

Ejercicio 16

Obténgase la ecuación general de la recta que pasa por los puntos

$$A(1/3, -2) \quad \text{y} \quad B(2, -1/2).$$

Ejercicio 17

¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta

$$2x - 3y + 5 = 0?$$

¿Se puede representar dicha recta mediante más de un sistema de ecuaciones paramétricas?

Ejercicio 18

¿Cuál es la ecuación general de la recta que pasa por el origen de un sistema de referencia $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ *y tiene como vector dirección*

a) $\boldsymbol{i}$; *b)* $\boldsymbol{j}$; *c)* $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

4. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Obtenidas las ecuaciones de la recta en el plano afín, se plantea el problema de saber cuál es la posición relativa de dos rectas.

Antes de abordar el problema conviene dar una interpretación a los coeficientes de x e y en la ecuación general de la recta.

Puesto que dicha ecuación ha resultado al eliminar λ en las ecuaciones paramétricas, después de ponerlas en la forma

$$\lambda = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

donde (a, b) es el vector director de la recta, resulta, después de quitar denominadores,

$$bx - ay + ay_1 - bx_1 = 0;$$

y si esta ecuación debe ser la general de la recta

$$Ax + By + C = 0$$

los coeficientes serán

$$A = b \quad , \quad B = -a$$

o de otra forma:

$$(a, b) = (-B, A)$$

por lo que se puede enunciar:

> Dada la recta $Ax + By + C = 0$, el vector
>
> $$(-B, A)$$
>
> es un vector de dirección de dicha recta.

Hecha esta observación, considérense las dos rectas

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

El conjunto de puntos del plano afín comunes a ambas rectas viene dado por todos los pares (x, y) que satisfacen al anterior sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si se intenta resolverlo por el método de reducción, multiplicando la primera ecuación por B' y la segunda por $-B$ y sumando para eliminar la y se obtiene:

$$\begin{array}{r} B'Ax + B'By + B'C = 0 \\ -BA'x - BB'y - BC' = 0 \\ \hline x(AB' - A'B) + B'C - BC' = 0 \end{array}$$

por lo que, si

$$AB' - A'B \neq 0$$

se puede despejar

$$x = (BC' - B'C)/(AB' - A'B)$$

Procediendo análogamente para calcular la incógnita y, resulta

$$y = (CA' - C'A)/(AB' - A'B)$$

En este caso se obtiene una solución única, lo que significa que existe un solo punto del plano común a las rectas dadas. Se dice que las rectas son *secantes* en el punto en cuestión.

El procedimiento seguido vale también para el caso en que

$$AB' - A'B = 0$$

Esta relación puede escribirse, cuando A' y B' son distintos de cero, en la forma equivalente

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

que expresa que los dos vectores $(-B, A)$ y $(-B', A')$ son del mismo subespacio vectorial, pues las componentes de ambos son proporcionales. Como los dos vectores citados son los de dirección de cada una de las rectas, se llega a la conclusión de que ambas tienen el mismo subespacio director, o lo que es lo mismo, la misma dirección.

Lo anterior no se aplica inmediatamente al caso en que uno de los dos, A' o B', son cero. Los dos a la vez no pueden serlo, pues no se tendría una recta. Si se supone que $A' = 0$, $A'B = 0$, luego también AB' debe ser cero, y como B' no puede serlo, tendrá que ser nulo A. Por tanto,

$$A' = 0 \implies A = 0$$

y el vector director de la primera recta es $(-B, 0)$, siendo $(-B', 0)$ el de la segunda. Claramente se ve que pertenecen al mismo subespacio unidimensional, por lo que ambas rectas tienen la misma dirección. De manera análoga se razona si B' es cero.

En conclusión:

> Si dos rectas son tales que $AB' - A'B = 0$, ambas poseen la misma dirección.

Caben ahora dos casos: si se verifica

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

las dos rectas *coinciden,* pues el sistema de dos ecuaciones se reduce a una sola, desde el momento en que una de ellas se obtiene multiplicando a la otra por una constante, y toda solución de la primera lo es de la segunda, y recíprocamente.

Por el contrario, si

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

el sistema no admite ninguna solución. Las dos rectas no tienen ningún punto en común y se dice que son *paralelas.*

Ejemplo 11

Las dos rectas

$$2x - 3y + 5 = 0$$
$$x + y - 2 = 0$$

son secantes en el punto (1/5, 9/5), como se comprueba resolviendo el sistema.

Ejemplo 12

Las dos rectas

$$y = (2/3)x - 1$$
$$2x - 3y - 3 = 0$$

una vez que la primera se pone en la forma

$$(2/3)x - y - 1 = 0$$

se ve que coinciden, pues los tres coeficientes de una son proporcionales a los de la otra.

Ejemplo 13

Las dos rectas

$$x - 2y + 1 = 0$$
$$2x - 4y - 7 = 0$$

son paralelas, pues

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{-7}$$

Ejercicio 19

Determínese cuál es la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = \ \ 1+\lambda \end{cases} \qquad r_2: \ x-3y+8=0$$

Ejercicio 20

Resuélvase la misma cuestión para las rectas

$$r_1: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-1+5\lambda \end{cases} \qquad r_2: \ 4x-3y+5=0$$

Ejercicio 21

Dada la recta $3x-5y+4=0$ *y la recta* $2x+my-5=0$, *¿cuánto ha de valer* m *para que ambas sean paralelas?*

Ejercicio 22

Dadas las rectas

$$\begin{aligned} x-3y+5&=0 \\ 2x+\ y+3&=0 \\ mx+2y-4&=0 \end{aligned}$$

hállese el valor de m *para que las tres sean concurrentes (es decir, pasen por el mismo punto).*

Ejercicio 23

Trácese, por el punto (1, 2), *la paralela a la recta*

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

5. BARICENTROS

Tómese un origen O en el plano afín y dos puntos P y Q.

Como ya se sabe, fijado el origen, al punto P le corresponde un vector $\overrightarrow{OP}$, y a Q un vector $\overrightarrow{OQ}$. Si ahora se toman dos números reales a y b, es posible considerar el punto M definido así:

$$\overrightarrow{OM}=a\cdot\overrightarrow{OP}+b\cdot\overrightarrow{OQ}$$

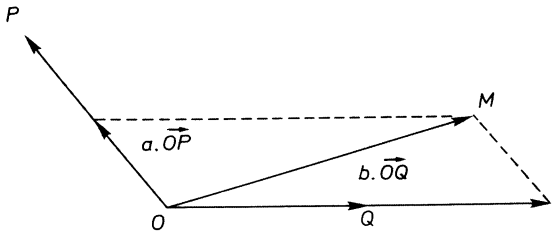


FIG. 5.20.

¿No sería lógico pensar que el punto M es «combinación lineal» de los puntos P y Q con coeficientes a y b? El hecho de tener ya el concepto de combinación lineal de vectores permitiría, por este método, extenderlo a puntos del espacio afín.

Existe, sin embargo, un inconveniente y es la imposibilidad, *a priori,* de prescindir del punto O. Es decir, nos gustaría que el punto M, combinación lineal de P y Q, dependiera exclusivamente de éstos, independientemente de cuál sea el origen elegido en el espacio.

Que éste no es el caso se ve inmediatamente. Si se pasa del origen O al nuevo origen O', el punto N definido así (Fig. 5.21),

$$\overrightarrow{O'N} = a \cdot \overrightarrow{O'P} + b \cdot \overrightarrow{O'Q}$$

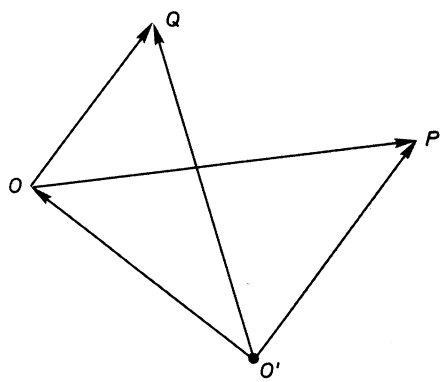


FIG. 5.21.

no tiene por qué coincidir con M. En efecto: puesto que

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{O'Q} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OQ},$$

resulta, sustituyendo en la última relación,

$$\overrightarrow{O'N} = a \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) + b \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OQ}) = (a+b) \cdot \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$$

puesto que

$$a \cdot \overrightarrow{OP} + b \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM}.$$

Por otra parte,

$$\overrightarrow{O'N} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{ON}$$

de modo que sustituyendo en lo anterior

$$\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{ON} = (a+b) \cdot \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$$

Pasando el vector $\overrightarrow{O'O}$ del primer miembro al segundo, y el $\overrightarrow{OM}$ del segundo al primero, resulta en definitiva

$$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (a+b-1) \cdot \overrightarrow{O'O}$$

y como $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN}$, queda

$$\overrightarrow{MN} = (a+b-1) \cdot \overrightarrow{O'O}.$$

Como el vector $\overrightarrow{O'O}$ es distinto del nulo, por ser el punto O distinto del O', el vector $\overrightarrow{MN}$ será distinto de cero en general, probándose con esto que $M \neq N$. Es decir, no se puede hablar de combinación lineal de punto de una manera intrínseca (independiente del origen), excepto en un caso. Porque de la expresión anterior se desprende que cuando $a+b-1=0$, los puntos M y N coinciden. Enunciemos el resultado:

> Dados los puntos P y Q del plano afín, y los números reales a y b tales que $a+b=1$, el punto M definido por
>
> $$\overrightarrow{OM} = a \cdot \overrightarrow{OP} + b \cdot \overrightarrow{OQ}$$
>
> es independiente de la elección de origen O en el plano, y sólo depende de P, Q, a y b. Se dice que M es el baricentro de los puntos P y Q afectados de los pesos a y b, y se escribe
>
> $$M = a \cdot P + b \cdot Q$$

El resultado anterior se ha obtenido partiendo de dos puntos, pero es perfectamente ampliable a cualquier número de ellos.

Ejemplo 14

El baricentro de los puntos $P(4, 3)$ y $Q(2, -2)$ afectados de pesos 1/3 y 2/3, respectivamente (obsérvese que suman 1), se halla así: como los puntos están dados por sus coordenadas en un sistema cartesiano, tomemos el origen O de dicho sistema como origen del plano. Ya se sabe que el resultado va a ser independiente del origen elegido.

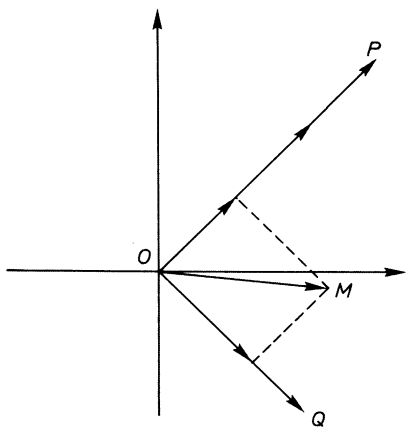


FIG. 5.22.

El vector $\overrightarrow{OP}$ es

$$\overrightarrow{OP} = 4 \cdot \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j}$$

y $\overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OQ} = 2 \cdot \boldsymbol{i} - 2 \cdot \boldsymbol{j}$$

de modo que, llamando M al baricentro

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

es decir:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot (4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) + \frac{2}{3}(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}) = \frac{8}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j}$$

por lo que las coordenadas cartesianas de M son $(8/3, -1/3)$.

Si se halla la ecuación de la recta determinada por P y Q, que resulta ser

$$5x - 2y - 14 = 0$$

y se sustituyen en ella las coordenadas de M, se comprueba que la verifican, de modo que M está sobre la recta determinada por P y Q. Este hecho no es accidental, pues:

> Dados dos puntos P y Q, cualquier baricentro de los mismos se halla situado sobre la recta determinada por los dos citados puntos. Más aún: los puntos de dicha recta forman el conjunto de todos los baricentros de P y Q.

Demostración: Sea $M = a \cdot P + (1-a) \cdot Q$. Entonces,

$$\overrightarrow{OM} = a \cdot \overrightarrow{OP} + (1-a) \cdot \overrightarrow{OQ}$$

o lo que es igual

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + a \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OQ} + a \cdot \overrightarrow{QP}$$

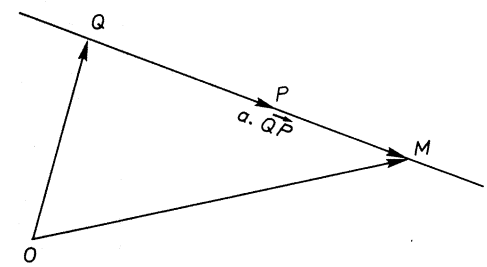


FIG. 5.23.

lo que significa que M pertenece a la recta determinada por P y Q. Recíprocamente, cada punto de la recta determina con O un vector $\overrightarrow{OX}$ que puede ponerse en la forma

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) =$$
$$= \lambda \cdot \overrightarrow{OP} + (1-\lambda) \cdot \overrightarrow{OQ}$$

lo que prueba que X, punto de la recta, es baricentro de P y Q. La demostración está concluida.

Ejercicio 24

Hállese el baricentro de los puntos $A(3, -1)$, $B(2, 3)$ *y* $C(5, 0)$, *afectados de pesos iguales a* 2, 3 *y* -4, *respectivamente.*

Ejercicio 25

¿Se puede hallar el baricentro de los puntos $A(1, 1)$ *y* $B(2, 3)$ *afectados de pesos respectivos* 1/4 *y* 2/3?

La introducción de baricentros permite disponer de otras coordenadas en el espacio afín distintas de las cartesianas, y útiles en diferentes campos. Por ejemplo, cuando se dan dos puntos se ha visto que el conjunto de todos sus baricentros es la recta determinada por los dos puntos dados. Un punto M pertenece a dicha recta si, y sólo si, es un baricentro (según el teorema antes demostrado). Por tanto,

$$M = a \cdot P + (1 - a) \cdot Q$$

equivalente a

$$\overrightarrow{OM} = a \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - a) \cdot \overrightarrow{OQ}$$

es la ecuación de dicha recta. Al punto M se le pueden asociar el par de coordenadas $(a, 1 - a)$, coeficientes de la combinación lineal que lo representa en términos de P y Q, y decir que $(a, 1 - a)$ son las coordenadas baricéntricas de M respecto de la referencia (¡no cartesiana!) constituida por P y Q.

En el plano se procede igual, sólo que tomando tres puntos P, Q, R no alineados. Cada punto del plano se puede poner como combinación lineal de los puntos dados

$$M = a \cdot P + b \cdot Q + (1 - a - b) \cdot R$$

y los tres números reales $(a, b, 1 - a - b)$ se llaman coordenadas baricéntricas del punto M del plano respecto de la referencia P, Q, R.

Una aplicación, a la vez interesante y curiosa, de las coordenadas baricéntricas, es la siguiente:

Cuando en Física se estudia el color, se ve que un color cualquiera se puede obtener mezclando en proporciones adecuadas tres colores fijos. Se puede escribir así, simbólicamente,

$$C = a \cdot C_1 + b \cdot C_2 + c \cdot C_3$$

Aumentar proporcionalmente a, b y c, que son las cantidades de luz de cada uno de los colores que se añaden para obtener C, sólo aumenta la intensidad de la luz coloreada resultante, pero no modifica el color de la misma. En consecuencia, si fijamos una intensidad de luz igual a 1 debe ser

$$a + b + c = 1$$

con lo que el «punto» C puede considerarse como baricentro de los puntos C_1, C_2 y C_3 (colores primarios) afectados de los pesos (intensidades luminosas) a, b y c. Cada color puede darse por sus tres coordenadas baricéntricas a, b, c.

Este hecho se emplea para retransmitir televisión en color. La señal de televisión transporta una señal de luminosidad de cada punto de la escena (es la señal que se transmite en el caso de blanco y negro) y, aparte de ella, dos señales que dan las componentes azul y roja, por ejemplo, de cada punto de la escena. Estas son las señales características de la televisión en color. Por supuesto, falta una tercera señal, pues con dos colores solamente es imposible reproducir todos. Pero esa señal se puede obtener en el propio receptor. Si se reduce la luminosidad a 1 para cada punto, y de 1 se restan las componentes azul y roja se obtiene:

$$1-a-b$$

que es la tercera componente c de color necesaria para reproducir la imagen.

Ejercicio 26

En la recta determinada por los dos puntos P y Q, ¿cuáles son las coordenadas baricéntricas de P en la referencia (no cartesiana) $\{P, Q\}$? ¿Y las de Q?

Ejercicio 27

El baricentro de los tres puntos $A(x, y)$, $B(1, 2)$ y $C(2, 4)$ afectados de pesos 3, -5 y 3, respectivamente, resulta ser el punto $(3, 4)$. Hállense las coordenadas cartesianas (x, y) de A, así como sus coordenadas baricéntricas cuando se toma como referencia no cartesiana la constituida por $\{B, C\}$ y el punto $(3, 4)$ baricentro de A, B y C.

6. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO. RAZON SIMPLE DE TRES PUNTOS

Cuando se tienen dos puntos en el plano afín, se llama segmento determinado por ambos puntos, P y Q, al conjunto

$$\overline{PQ}=\{R/R=a\cdot P+(1-a)\cdot Q \quad O\leqslant a\leqslant 1\}$$

Es decir, el segmento determinado por P y Q es el conjunto de puntos que son baricentros de P y Q *afectados de pesos positivos o nulos,* pues al ser a un número real comprendido entre 0 y 1, lo mismo le ocurre a $1-a$, que es el otro coeficiente.

Obsérvese que el segmento determinado por P y Q está contenido en la recta determinada por dichos dos puntos.

El punto del segmento $\overline{PQ}$ que corresponde a la combinación lineal

$$M=\frac{1}{2}\cdot P+\frac{1}{2}\cdot Q$$

se llama punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Podrá parecer extraño que no se defina el punto medio de un segmento como el punto que divide a dicho segmento en dos partes iguales. La razón es —y a lo largo del capítulo debe haberse percibido— que en el plano afín no hay definida una distancia, que corresponde a una estructura más rica que la afín, la del *plano euclídeo*. Así que, en principio, ha de darse una definición independiente de una idea de «medida» de longitudes. El punto medio resulta ser así un baricentro más, aunque muy especial por tener los coeficientes de P y Q iguales.

De lo anterior no debe concluirse que en el plano afín es imposible comparar dos segmentos en lo que a la idea de longitud se refiere. De hecho, dos segmentos que estén sobre dos rectas paralelas se pueden comparar siempre, cosa que no ocurre con segmentos situados en rectas no paralelas. Veamos cómo es posible lograr lo primero.

Definición:

> Dos segmentos paralelos PQ y RS se llaman equivalentes si existe una traslación del plano afín que lleva uno sobre el otro, de forma que P se aplique sobre R y Q sobre S.

Cuando se tienen dos segmentos sobre rectas paralelas, al existir una traslación que transforma una recta en la otra, el segmento contenido en la primera se aplica sobre un segmento equivalente, contenido en la segunda.

Por tanto, se reduce la cuestión al caso en que los dos segmentos están contenidos en una misma recta.

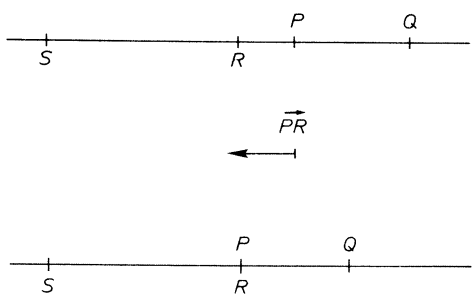


FIG. 5.24.

Dados los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, siempre es posible llevar a coincidir los dos orígenes P y R mediante una traslación de vector $\overrightarrow{PR}$. Una vez hecho esto, considérense los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PS}$ (ambos pertenecen al subespacio director de la recta que contiene a los dos segmentos).

Se tiene entonces

$$\overrightarrow{PS} = a \cdot \overrightarrow{PQ}$$

El número real a se llama razón de los dos segmentos $\overline{PS}$ y $\overline{PQ}$, y se suele escribir

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{PQ}} = a$$

Si $a = 1$, se trata de segmentos equivalentes.

Con este concepto ya es posible dar la siguiente definición:

> Se llama *razón simple* de tres puntos alineados A, B y C, dados en este orden, a la razón de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y se escribe:
>
> $$(A\ B\ C) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

De la definición se desprende que, si se toman los puntos C y A como referencia afín en la recta, entonces

$$B = a \cdot C + (1 - a) \cdot A \ ;$$

es decir, que la razón simple (ABC) es el peso del punto C en la representación como baricentro de B.

En particular, B será el punto medio del segmento AC cuando

$$(A\ B\ C) = 1/2$$

Si en la expresión de la razón simple (ABC) se dejan fijos A y C y se permite que B varíe en la recta, la razón simple será función de la posición de este punto. Cuando B coincide con A, la razón simple vale 0, y cuando B coincide con C, vale 1. Entre A y C toma valores positivos menores que 1.

La gráfica de la función «razón simple» (ABC)», fijados B y C, es la que se dibuja en la figura 5.25.

Dado un segmento $\overline{PQ}$ y un punto M de la recta determinada por P y Q, se dice que M divide al segmento $\overline{PQ}$ en la razón r si

$$(M\ P\ Q) = r$$

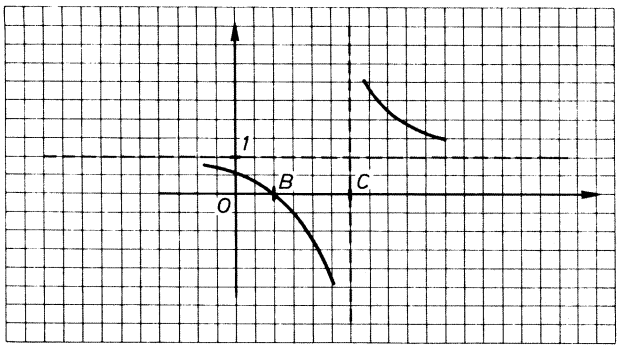


FIG. 5.25.

7. DETERMINACION DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Sean $B(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento, dados por sus coordenadas cartesianas, respecto de un sistema $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. Establecido el número real r, se trata de determinar las coordenadas cartesianas del punto A que divide al segmento BC en dos segmentos cuya razón es r. Sean (x, y) las coordenadas de ese A:

Como debe verificarse

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

que equivale a

$$\overrightarrow{AB} = r \cdot \overrightarrow{AC}$$

se tiene, habida cuenta de que las componentes del vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ son $(x_1 - x, y_1 - y)$, y las de $\overrightarrow{AC}$ son $(x_2 - x, y_2 - y)$:

$$x_1 - x = r(x_2 - x)$$
$$y_1 - y = r(y_2 - y)$$

de donde

$$x_1 - rx_2 = (1 - r)x$$
$$y_1 - ry_2 = (1 - r)y$$
$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}$$
$$y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r}$$

Tal como se ha deducido, r es negativo cuando el punto A es interior al segmento $\overline{BC}$. En el caso del punto medio, $r=-1$, con lo que el punto medio de BC es

$$A\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Observación: No se contradice el tener que tomar aquí $r=-1$ para obtener el punto medio con lo dicho antes en el sentido de que B es punto medio del segmento AC si $(ABC)=1/2$. Las dos afirmaciones son equivalentes, en el sentido de que si A es el punto medio de BC, se verifican las dos relaciones

$$(ABC)=-1 \quad , \quad (BAC)=1/2$$

Piénsese que dados tres puntos, en principio existen seis posibles valores de la razón simple, según el orden en que se tomen.

Ejercicio 28

Dados los puntos $A(2,-1)$ y $B(0,2)$, hállese el punto M que divide al segmento AB en dos segmentos de razón -3.

Ejercicio 29

Hállese un punto sobre la recta $x+y=1$ tal que, al unirlo con el origen la recta resultante corte al segmento PQ ($P(0,2)$; $Q(5,0)$) en un punto que lo divida en dos segmentos de razón -2.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.2

15. El vector dirección $\overrightarrow{PQ}$ es $(-3,2)$. Luego

$$x=1-3\lambda$$
$$y=3+2\lambda$$

A y C pertenecen a la recta. B y D no pertenecen.

16.

$$\frac{x-(1/3)}{2-(1/3)}=\frac{y+2}{-(1/2)+2},$$

es decir,

$$9x-10y-23=0.$$

17. Tómense dos puntos que estén sobre la recta (lo más fácil es hacer primero $x=0$ y hallar y, haciendo lo mismo con $y=0$

calculando x), por ejemplo, $P(-5/2, 0)$ y $Q(0, 5/3)$. Las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\lambda$$
$$y = \frac{5}{2}\lambda$$

Existe una infinidad de representaciones paramétricas distintas.

18. *a)* $y = 0$; *b)* $x = 0$; *c)* $x + y = 0$.

19. Paralelas.

20. Se cortan en el punto (37/19, 81/19).

21. $m = -10/3$.

22. $m = -1$.

23. $\dfrac{x-1}{3} + \dfrac{y-2}{4} = 0$.

24. $(-8, 7)$.

25. No. La suma de los pesos no es uno.

26. Coordenadas de P: $(1, 0)$; coordenadas de Q: $(0, 1)$.

27. Las coordenadas cartesianas de A son $(2/3, 2/3)$. Las baricéntricas resultan ser $(5/3, 1, -5/3)$.

28. El punto es el de coordenadas $(1/2, 5/4)$.

29. $(5/6, 1/6)$.

5.3

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Hállense las ecuaciones de una traslación que lleva la recta $x-2y+3=0$ sobre la recta $x-2y+1=0$, y la recta $2x+y=0$ sobre la recta $2x+y+7=0$.

2. Se considera la sucesión de traslaciones del plano afín $t_{x_1}, t_{x_2}, \ldots, t_x, \ldots$, donde los vectores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \ldots$, referidos a la base $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, son:

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{i}\ ,\quad \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{j}\ ,\quad \boldsymbol{x}_3=(1/2)\cdot\boldsymbol{i}\ ,\quad \boldsymbol{x}_4=(1/2)\cdot\boldsymbol{j}\ ,$$
$$\boldsymbol{x}_5=(1/4)\cdot\boldsymbol{i}\ ,\quad \boldsymbol{x}_6=(1/4)\cdot\boldsymbol{j}\ ,\quad \boldsymbol{x}_7=(1/8)\cdot\boldsymbol{i}\ ,\quad \text{etc.}$$

Hállense las coordenadas cartesianas del punto transformado del origen O en la traslación producto de todas ellas, si se le puede dar un sentido.

3. Dados tres puntos no alineados en el plano afín, P, Q y R, demuéstrese que la recta que une los puntos medios de los segmentos PQ y PR es paralela a la recta QR.

4. Si P, Q, R y S son cuatro puntos del plano afín no alineados tres a tres, y se llama A, B, C y D a los puntos medios de los segmentos PQ, QR, RS y SP, respectivamente, demuéstrese que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

5. Se llama simetría central la transformación del plano afín definida así: Dado un punto S, centro de simetría, a cada punto P del plano se le hace corresponder un punto P' alineado con S y P de manera que S sea el punto medio del segmento PP'.

Hállense las ecuaciones de la simetría cuyo centro es el punto S de coordenadas $(1, 2)$ respecto de un sistema cartesiano.

6. Utilícese el resultado del ejercicio anterior para demostrar que el producto de la simetría central de centro $S(1, 2)$ y la simetría central de centro $O(0, 0)$ es una traslación. ¿Es conmutativo el producto de simetrías?

7. De un triángulo ABC se conocen los puntos medios de sus lados. El punto $L(1, 0)$ es punto medio de AB, el punto $M(-2, 1)$ es punto medio de BC, y el punto $N(1, 2)$ es punto medio de CA.

Hállense las coordenadas de los tres vértices A, B y C.

8. Demuéstrese que el producto de la simetría de centro $(1, 2)$ y la traslación t_x de vector $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ es una simetría de la que se pide hallar el centro.

9. Generalizando el caso del ejercicio 7, se trata de hallar los vértices de un pentágono del que se conocen los puntos medios de sus lados, que son

Punto medio de AB: $(0, 1)$
» » » BC: $(1, 0)$
» » » CD: $(1, -1)$
» » » DE: $(0, -1)$
» » » EA: $(-2, 1)$

Como sugerencia, piénsese que si se toma uno de los vértices, supuesto conocido, y se le aplican sucesivamente las simetrías de centros los puntos medios de los lados, después de recorrer todos los vértices se vuelve al punto inicial.

10. Dado el triángulo de vértices $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ y $C(a_3, b_3)$, hállese el punto medio M del lado BC y luego el baricentro del triángulo, sabiendo que divide al segmento $\overline{BM}$ en la razón -2.

11. Se considera, para m real, la recta

$$mx - (2m + 1)y + m - 3 = 0$$

Se pide:

a) ¿Para qué valor de m la recta pasa por el punto $(1, 3)$?

b) ¿Hay algún valor de m para el cual la recta resultante sea paralela a la que pasa por $(1, -4)$ y tiene vector de dirección $(2, -3)$?

12. En el espacio afín tridimensional obténganse las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos puntos

$$A(1, -1, 3) \quad \text{y} \quad B(0, 2, -3)$$

13. Una recta corta a los tres lados AB, BC y CA de un triángulo ABC en los puntos P, Q y R, respectivamente, distintos de los vértices. Demuéstrese que los tres puntos

$$X = R + P - A$$
$$Y = P + Q - B$$
$$Z = Q + R - C$$

dados como baricentros, están alineados.

14. Se considera en el plano afín el triángulo $A(1, 0)$ $B(0, 1)$ $C(2, 3)$ y la recta r: $2x-3y-1=0$. Por A, B y C se trazan rectas paralelas a la de ecuación $x+y+1=0$, que cortan a la recta dada r en los puntos P, Q y R, respectivamente. Por P se traza la paralela a BC, por Q la paralela a AC y por R la paralela a AB. Estas tres últimas rectas determinan un triángulo. Demuéstrese que es simétrico del ABC en una simetría de la que se pide el centro.

5.4

Autoevaluación A-5

1. Un plano afín es

a) un espacio vectorial con un vector origen;
b) el plano de los vectores libres;
c) un conjunto de puntos sobre los que actúan los elementos de un espacio vectorial cumpliendo ciertas condiciones;
d) un conjunto de puntos sobre los que actúan los elementos de un espacio vectorial bidimensional cumpliendo ciertas condiciones.

2. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \times V_2 &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (M, \boldsymbol{x}) &\longrightarrow M + \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

fijado un $\boldsymbol{x} \in V_2$, dada por

a) es un punto del plano;
b) es el vector determinado por origen y el punto M;
c) es una traslación;
d) es una aplicación que sirve para definir otra aplicación de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$.

3. Los vectores del espacio vectorial asociado al plano afín $\mathcal{P}$ actúan sobre los puntos del mismo verificando la siguiente propiedad:

a) Llevando un punto arbitrario en otro.
b) Dado un punto y un vector siempre existe otro vector que lleva al segundo sobre el primero.
c) Dados dos vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, siempre existe un único punto M tal que $M(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (M+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}$.
d) Los vectores no son los que actúan, sino los escalares del cuerpo.

4. Dado un punto P del plano afín, y un vector $\boldsymbol{x} \in V_2$, el punto $(P+\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{x})$ es

a) el origen O;
b) depende del vector $\boldsymbol{x}$ elegido;
c) puede ser cualquier punto del plano;
d) necesariamente es el punto P.

5. Si, dados un elemento M del plano afín y un vector $\boldsymbol{x}$ se verifica que $M+\boldsymbol{x}=M$, puede asegurarse que

a) M es el origen del plano;
b) no es posible que se dé tal relación;
c) el vector $\boldsymbol{x}$ es el nulo;
d) la traslación de vector $\boldsymbol{x}$ no es una biyección.

6. Una traslación del plano afín es

a) una aplicación del plano en V_2;
b) una biyección del plano en sí mismo;
c) una biyección de V_2 en el plano;
d) una aplicación de $\mathcal{P} \times V_2$ en $\mathcal{P}$.

7. La traslación asociada al vector nulo

a) lleva todo punto al origen;
b) es la idénticamente nula;
c) no se puede asociar ninguna traslación a tal vector;
d) es la transformación idéntica.

8. El conjunto de todas las traslaciones del plano con la operación producto es:

a) un espacio afín;
b) un espacio vectorial;
c) un grupo abeliano;
d) un cuerpo.

9. La traslación producto de las traslaciones t_x, t_y, t_{x-y}, t_{2x} es

a) la traslación identidad;
b) no es una traslación;
c) es la traslación de vector $4\boldsymbol{x}$;
d) es la traslación de vector $2\boldsymbol{y}$.

10. Al elegir un punto origen en un plano afín:

a) se puede dar estructura de espacio vectorial a dicho plano;
b) los trasladados de cero forman un grupo abeliano;
c) se puede establecer una correspondencia entre vectores de V_2;
d) no es posible definir traslaciones que transformen O en un punto dado P.

11. En una referencia $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ en el plano afín las coordenadas de un punto P son

a) las componentes del vector de la traslación que lleva P sobre O;
b) las componentes del vector de la traslación que deja fijo a P;
c) las componentes del vector $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$, con a y b arbitrarios;
d) las componentes del vector de la traslación que lleva O sobre P.

12. En el plano afín con referencia $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, las coordenadas del punto $O-(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$ son

a) $(0, 0)$;
b) $(1, 1)$;
c) $(-1, 1)$;
d) $(1, -1)$.

13. Una variedad lineal afín en el plano es

a) un conjunto arbitrario de puntos del plano que contenga a una recta;
b) un conjunto de puntos del plano tales que los vectores determinados por cada dos de ellos forman un subespacio vectorial de V_2;
c) un conjunto de puntos del plano afín que contiene al origen O;
d) un conjunto de puntos tales que el vector determinado por O y un punto de la variedad pertenece a un subespacio vectorial de V_2.

14. Subespacio director de una recta es

a) cualquier subespacio unidimensional que contenga a O;
b) todo el espacio V_2;
c) el subespacio una de cuyas bases es $\{\overrightarrow{PQ}\}$, siendo P y Q puntos de la recta;
d) el subespacio una de cuyas bases es $\{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\}$, siendo P y Q puntos de la recta.

15. El hecho de que dos rectas del plano tengan distinto subespacio director permite afirmar que

a) no tienen más punto en común que el O;
b) no son paralelas;
c) son paralelas salvo que coincidan;
d) es imposible que tengan distinto subespacio director.

16. Los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 6)$ se hallan afectados de pesos -2 y 1. Por eso se puede asegurar que su baricentro es

a) 0, ya que $-2\cdot(1, 3)+1\cdot(2, 6)=(0, 0)$;
b) $(2, 6)$, pues es el que tiene coeficiente positivo;
c) el punto medio del segmento AB;
d) no se puede definir el baricentro.

17. Determínense las ecuaciones de la traslación $t_x \cdot t_y \cdot t_z$, donde

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} \quad , \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \quad , \quad \boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{i}.$$

18. Hállese la ecuación general de la recta

$$r = \{Q / Q = P + \lambda \boldsymbol{x}\},$$

donde $P(0, 1)$ y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$.

19. Encuéntrese la ecuación de la recta que es transformada de la de ecuación

$$x + 3y - 1 = 0$$

mediante la traslación

$$x' = x - 3$$
$$y' = y + 1$$

¿Qué interpretación tiene el resultado?

20. Las tres rectas

$$x - 2y + 3 = 0 \quad , \quad 3x - my + 2 = 0 \quad , \quad 2x + my - 1 = 0$$

son concurrentes. Hállese el valor de m.

21. Los vértices ABC de un paralelogramo $ABCD$ tienen por coordenadas

$$A(-1, 0) \quad , \quad B(1, 2) \quad , \quad C(3, 3).$$

Hállense las coordenadas del cuarto vértice D y las coordenadas del centro del paralelogramo. Compruébese que es el baricentro de los cuatro vértices, cada uno afectado de un peso igual a 1/4.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-5

1.	*d).*	**5.**	*c).*	**9.**	*c).*	**13.**	*b).*
2.	*d).*	**6.**	*b).*	**10.**	*a).*	**14.**	*c).*
3.	*a).*	**7.**	*d).*	**11.**	*d).*	**15.**	*b).*
4.	*d).*	**8.**	*c).*	**12.**	*c).*	**16.**	*d).*

17. $x' = x$
$y' = y + 3.$

18. $3x + y - 1 = 0.$

19. Despejando x, y en función de x', y' en las ecuaciones de la traslación y sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación de la recta dada, resulta

$$(x' + 3) + 3(y' - 1) - 1 = 0$$

es decir,

$$x' + 3y' - 1 = 0.$$

Resulta la misma recta, lo que indica que tal recta es invariante en la traslación, cosa que podía haberse visto sin más que observar que el vector de la traslación es el vector director de la recta, por lo que la recta se ha desplazado «resbalando» sobre sí misma, y permaneciendo como un todo fija.

Sin embargo, los puntos situados sobre la recta se han trasladado (a puntos situados también sobre ella).

20. $m = 1.$

21. Trazando paralelas por C a AB y por A a BC, se obtienen las dos rectas

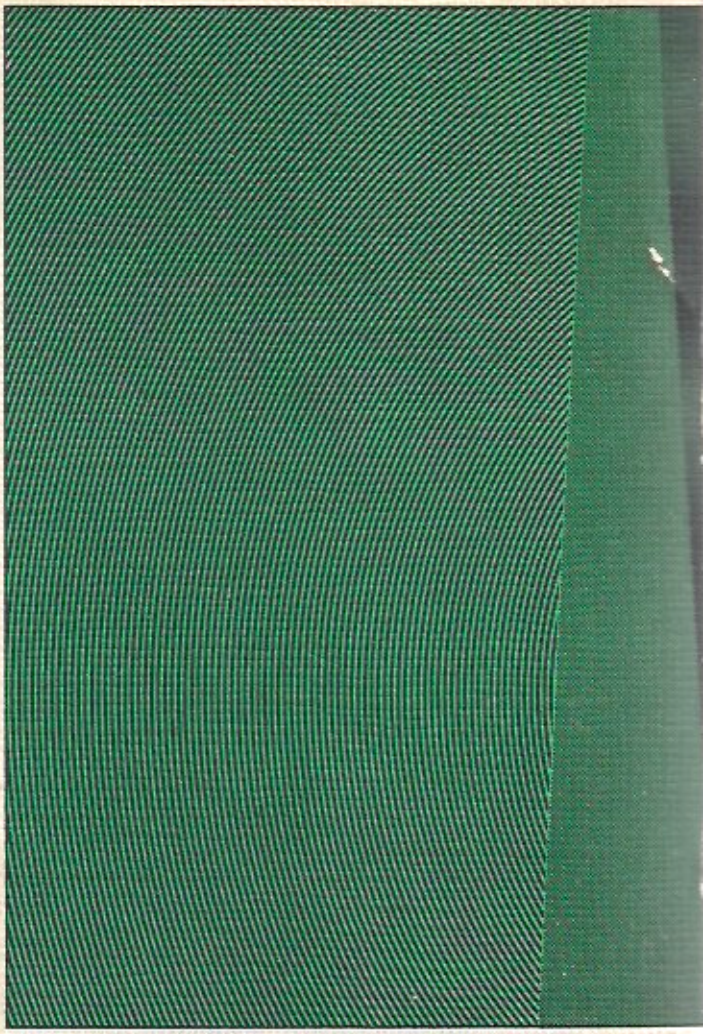
$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{(paralela a } BC \text{ por } A)$$
$$x - y = 0 \quad \text{(paralela por } C \text{ a } AB)$$

La intersección de ambas nos da el vértice $D(1, 1)$.

El centro, obtenido como interpretación de las diagonales AC y BD resulta ser el punto $(1, 3/2)$, y efectivamente

$$(1, 3/2) = (1/4)A + (1/4)B + (1/4)C + (1/4)D.$$

Alhambra



Autorizado por el Ministerio de Educación y Ciencia, para su utilización en el segundo curso del Bachillerato, por Orden del 20-9-1976. («B.O.E.» del 5-11-1976.)